

for 2nd grade undergraduate students

Ch. 3 Elementary Fluid Dynamics

$$\sum F = ma$$

$$F_B + F_{SN} + F_{ST} = ma$$

$$F_B + pA + \mu \frac{du}{dy} A = m(a_c + a_t)$$

Professor Jeekeun Lee
Fluid Mechanics Laboratory
Division of Mechanical System Engineering
College of Engineering, JBNU, Republic of Korea

Ch. 3 Elementary Fluid Dynamics

- 3.1 Newton's Second Law (Newton 제 2 법칙)
- 3.2 $F=ma$ along a Streamline (유선을 따라 $F=ma$ 적용)
- 3.3 $F=ma$ Normal to a Streamline (유선에 수직하게 $F=ma$ 적용)
- 3.4 Physical Interpretation (물리적 해석)
- 3.5 Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure (정압, 정체압, 동압 및 전압)
- 3.6 Examples of Use of the Bernoulli equation (응용 예)
- 3.7 The Energy Line and the Hydraulic Grade Line (에너지선 및 수력 구배선)
- 3.8 Restrictions on Use of the Bernoulli Equation (Bernoulli Equation의 사용 제한조건)
- 3.9 Chapter Summary and Study Guide (요약 및 학습안내)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

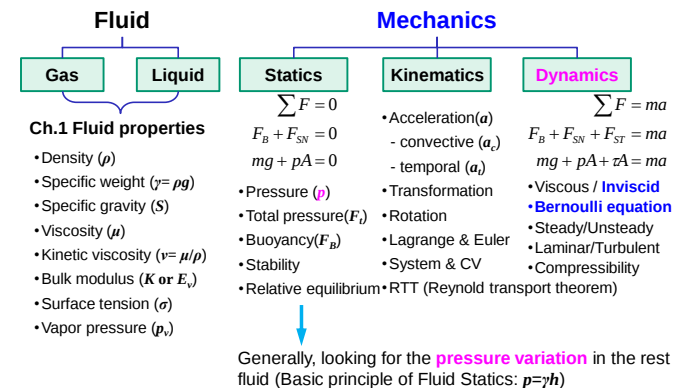
Learning Objectives in Ch.3

- ✓ discuss the application of **Newton's second law** to fluid flows.
- ✓ explain the development, uses, and limitations of the **Bernoulli equation**.
- ✓ use the **Bernoulli equation** (stand-alone or in combination with the continuity equation) to solve simple flow problems.
- ✓ apply the concepts of **static, stagnation, dynamic, and total pressures**.
- ✓ calculate various flow properties using the **energy and hydraulic grade lines**

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Ch. 3 Elementary Fluid Dynamics

✓ Fluid and Fluid Mechanics (유체 및 유체역학)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

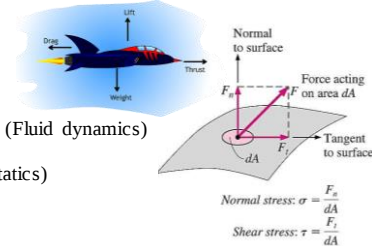
Ch. 3 Elementary Fluid Dynamics

✓ Fluid dynamics (유체 동역학)

- 움직이는 유체(액체 또는 기체)의 역학적 해석. ($F=ma$: Newton's second law)
- 속도(V), 압력(P) 등 유체 성질을 공간(s) 및 시간(t)의 함수로서 계산하는 문제
- 비점성 유체: Euler's Motion Eq.(오일러 운동방정식), Bernoulli Eq.(에너지 방정식)
- 점성 유체: Navier-Stokes Motion Eq., Modified Bernoulli Eq.(수정 에너지방정식)

$$\begin{aligned}\sum F &= F_B + F_s \\ &= F_B + F_{SN} + F_{ST} \\ &= F_B + p \cdot A + \tau \cdot A \\ &= F_B + p \cdot A + \mu \frac{du}{dy} \cdot A = ma \quad (\text{Fluid dynamics}) \\ &= F_B + p \cdot A + 0 = 0 \quad (\text{Fluid statics})\end{aligned}$$

F_B : Body force
 F_s : Surface force
 F_{SN} : Normal term of surface force
 F_{ST} : Tangential term of surface force

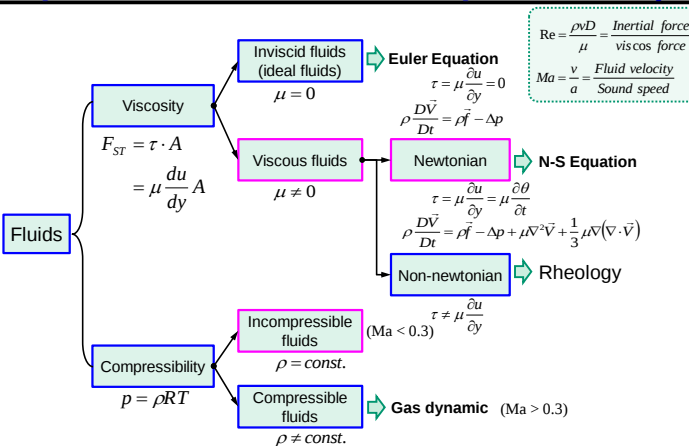


Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law (Newton 제 2 법칙)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

2) Classification of Fluids (유체의 분류)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

✓ 비점성 유체 (Inviscid fluids or ideal fluids)에 대한 유체동역학: Ch.3

: 모든 유체는 점성을 갖고 있음. 그러나 3장에서는 비점성 유체에 대해서만 다룬다.

: 점성 유체에 대한 유체 동역학은 6장에서 상세히 다룬다

- 비점성 유체 (Inviscid fluids)에 작용하는 힘 (Net force)

$$\begin{aligned}\sum F &= F_B + F_s \\ &= F_B + F_{SN} + F_{ST} \\ &= F_B + p \cdot A + \tau \cdot A \\ &= F_B + p \cdot A + \mu \frac{du}{dy} \cdot A = ma \quad (\text{Fluid dynamics}) \\ &= F_B + p \cdot A + 0 = \frac{m}{\text{particle mass}} \times \frac{a}{\text{particle acceleration}} \quad (\text{Fluid dynamics for inviscid flow})\end{aligned}$$

Net gravity force, Net pressure force, particle mass, particle acceleration

$$\text{힘} = \text{중력} + \text{압력} = \text{질량} \times \text{가속도}$$

각 항을 입력 가능한 항으로 변환 → Euler's Motion Equation (비점성 유체 유동의 운동방정식)

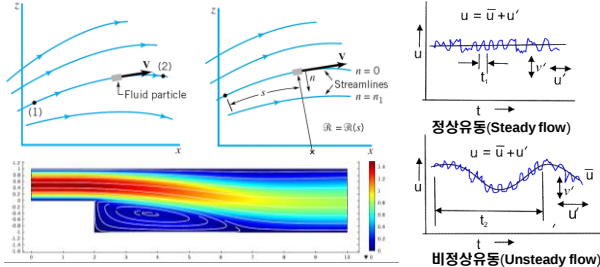
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

✓ Basic terms in the analysis of fluid motion (새로운 용어)

- **정상유동(Steady flow)**: 유동장의 주어진 점에서 시간(t)에 따라 특성변화가 없는 유동 즉, 유체 입자는 **유선(Streamline)**의 **접선방향으로 같은 경로(유선)**를 따라 움직인다. (각 지점에서 같은 속도)

$$\frac{\partial \vec{V}(x_0, y_0, z_0)}{\partial t} = 0$$

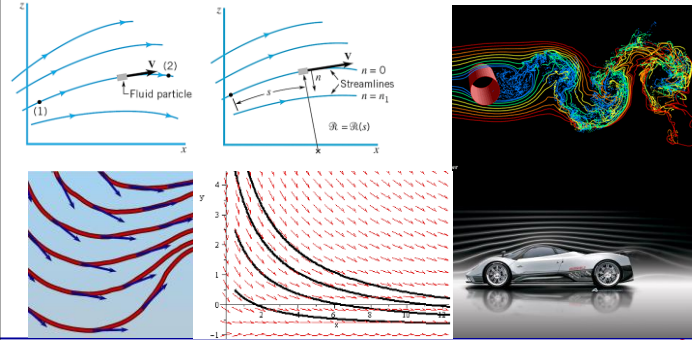


정상유동의 경우: 모든 방정식에서 **시간 항(∂)**이 소거됨
Ch.3에서는 정상유동의 경우만 다룬다. (Ch. 4장에서 보다 상세히 설명)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

- **Streamline(유선)**: 각 점에서 유체입자의 **속도벡터의 접선**을 연결한 선.
정상유동: 유선=유체입자의 경로
속도벡터가 항상 접선이므로 유선을 가로지르는 유동은 없음
유선은 **2차원 유동**에서만 정의 됨. (3차원 유동은 **속도포텐셜** 사용)

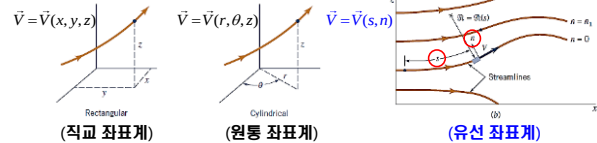


Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

✓ 벡터 해석(Vector analysis): 힘, 속도 등 벡터량 계산

벡터의 3 요소: **작용점, 방향(기저벡터), 크기** → 좌표계 (Coordinates system)가 필요



✓ 비점성 유체 입자의 움직임 (moving particle in inviscid flow)

- 기본가정: 1) 비점성 유동: No viscosity = No shearing stress (작용 힘=중력+압력)
2) 정상유동(Steady flow): 시간에 따라 특성변화가 없음(시간($\partial/\partial t$)항 소거)
3) **유선을 따르는 유동**: 유체입자는 유선을 따라 이동
속도벡터는 유선의 접선방향.
(속도벡터(유선)의 수직방향 유동이 없음(유선 이탈 불가))

좌표계: 기본가정에 적합하도록 **유선 좌표계**(Streamline coordinate)를 선택

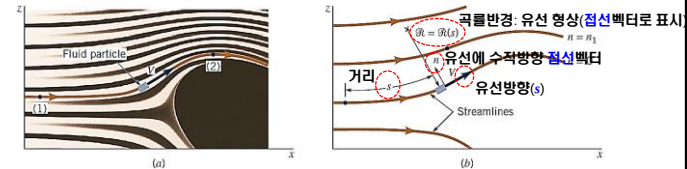
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

✓ Streamline coordinate (유선 좌표계): $F=ma$ 적용을 위함

2차원 유동에서 유선방향(s)과 유선의 수직방향(n)으로 나타낸 좌표계
속도벡터가 항상 유선방향(s 방향)에 **접선**이므로 계산이 매우 편리(유선 좌표계 사용 가장 큰 장점)

$\vec{V} = v_s \hat{s}$ 속도벡터가 항상 유선에 점(tangent)하므로
크기와 유선방향(s) 단위벡터로 표시 (가속도를 매우 간결하게 표현할 수 있음)
(크기) (방향)



• Two components in Streamline coordinates(유선 좌표계의 두 성분)

예) 직교 좌표계의 3가지 성분: x, y, z (좌표축) 또는 i, j, k (단위 벡터)

- 1) 접선좌표(tangential coordinate): 유선방향(s), 유체입자의 이동 거리 표시 (속도와 관계)
- 2) 수직좌표(normal coordinate): 유선의 수직방향(n), 유선의 곡률을 표시 (유선 모양을 표시)

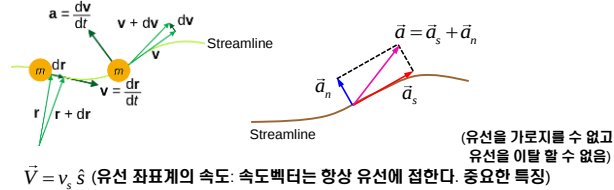
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

- Two accelerations of fluid particle along s (접선) and n (수직) (두 가지 가속도 성분)

예) 직교 좌표계의 3가지 가속도 성분: a_x, a_y, a_z

- 유선(또는 접선) 방향 가속도(a_s): 유선방향(s) 속도변화를 표시
- 수직(또는 구심) 방향 가속도(a_n): 유선의 곡률(R)의 변화(방향 변화)를 표시



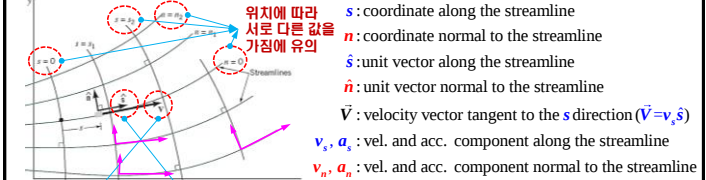
$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n \quad \begin{cases} \vec{a}_s = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} & \text{(구하고자 하는 것)} \\ \vec{a}_n = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \frac{d\theta}{dt} = \vec{V} \omega = \frac{V^2}{R} & \text{(구심가속도)} \end{cases} \quad \sum F = ma$$

$F_B + F_{SN} + F_{ST} = ma$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

- ✓ 접선 및 구심 가속도 계산(tangential and normal acceleration, 2D flow)



속도(V)는 유동방향(s)과 유체 입자 위치($n=0, n=n_1, n=n_2 \dots$)의 함수

$$\vec{V} = \vec{V}(s, n) = v_s \hat{s} \quad (v \text{ 는 } s \text{ 와 } n \text{ 의 위치 } (0, 1, 2 \dots) \text{ 에 따라 달라진다는 의미})$$

(크기) (방향)

$$v_s = v_s(t, s, n), \quad \hat{s} = \hat{s}(t, s, n), \quad dv_s(t, s, n) = \frac{\partial v_s}{\partial t} dt + \frac{\partial v_s}{\partial s} ds + \frac{\partial v_s}{\partial n} dn$$

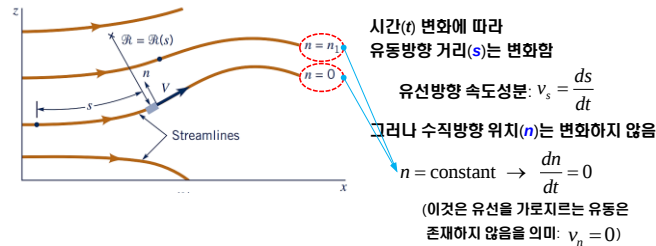
$$d\hat{s}(t, s, n) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} dt + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} ds + \frac{\partial \hat{s}}{\partial n} dn$$

속력(speed): scalar (크기)
속도(velocity): vector (크기+방향)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

시간(t) 변화에 따른 유동방향 거리(s)와 유동방향에 수직방향 거리(n)에 대한 추가설명



$$v_s = v_s(t, s, n), \quad \hat{s} = \hat{s}(t, s, n),$$

$$dv_s(t, s, n) = \frac{\partial v_s}{\partial t} dt + \frac{\partial v_s}{\partial s} ds + \frac{\partial v_s}{\partial n} dn \rightarrow \frac{dv_s}{dt}(t, s, n) = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \frac{dn}{dt}$$

$$d\hat{s}(t, s, n) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} dt + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} ds + \frac{\partial \hat{s}}{\partial n} dn \rightarrow \frac{d\hat{s}}{dt}(t, s, n) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial n} \frac{dn}{dt}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

유체 입자의 가속도는 접선 및 구심 가속도 성분으로 구성

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = a_s \hat{s} + a_n \hat{n}$$

$$= \frac{D(v_s \hat{s})}{Dt} = \frac{Dv_s}{Dt} \hat{s} + v_s \frac{D\hat{s}}{Dt} = \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \frac{dn}{dt} \right) \hat{s} + v_s \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial n} \frac{dn}{dt} \right)$$

유선방향 속도성분: $v_s = \frac{ds}{dt}$ (결국 복잡한 표현을 s 와 n 으로 나타내야 함)

유체 입자는 동일 유선에 머물러 있으므로 (유선의 정의): $\frac{dn}{dt} = 0$ ($\because n = \text{constant}$)
(유선을 가로지르는 유동은 없음. 즉, 유선 이탈 없음)

$$\vec{a} = \frac{D(v_s \hat{s})}{Dt} = \frac{Dv_s}{Dt} \hat{s} + v_s \frac{D\hat{s}}{Dt}$$

$$= \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \frac{dn}{dt} \right) \hat{s} + v_s \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial n} \frac{dn}{dt} \right)$$

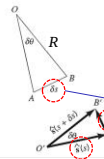
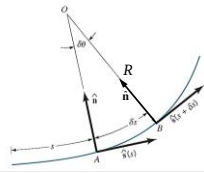
$$= \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) \hat{s} + v_s \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + v_s \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \right)$$

Note: $dv_s(t, s, n) = \frac{\partial v_s}{\partial t} dt + \frac{\partial v_s}{\partial s} ds + \frac{\partial v_s}{\partial n} dn$
 $\frac{Dv_s}{Dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \frac{dn}{dt}$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

유선방향 단위벡터($\hat{s}$)와 유선 곡률(R)과의 관계



$\hat{s}$: unit vector along the streamline
 $|\hat{s}|: 1$ (unit value)
 $\hat{n}$: unit vector normal to the streamline
 $|\hat{n}|: 1$ (unit value)

$$\delta s = R \delta \theta$$

$$\delta \hat{s} = |\hat{s}| \delta \theta \hat{n} = \delta \theta \hat{n} \quad (\text{if limit } \delta s \rightarrow 0)$$

(B점이 A점에 접근하면, 즉 δs 가 0으로 접근하면 $\delta \hat{s}$ 의 방향은 수직방향($\hat{n}$)으로 접근한다)

$$\delta \hat{s} = \hat{s}(s + \delta s) - \hat{s}(s) = \left(\hat{s} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \delta s \right) - \hat{s} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \delta s$$

$$\delta \hat{s} = |\hat{s}| \delta \theta \hat{n} = \delta \theta \hat{n}, \text{ if limit } \delta s \rightarrow 0$$

Note: Taylor series expansion

$$p(x + dx) = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

두 식을 결합하면,

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \delta s = \delta \theta \hat{n} \rightarrow \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \hat{n} = \frac{\partial \theta}{R \delta \theta} \hat{n} = \frac{\hat{n}}{R} \quad (\delta s = R \delta \theta)$$

$$\hat{s}(s + \delta s) = \hat{s} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \delta s$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

앞의 과정과 유사하게 유선방향 단위벡터($\hat{s}$)의 시간변화를

$$\delta \hat{s} = \hat{s}(t + \delta t) - \hat{s}(t) = \left(\hat{s} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} \delta t \right) - \hat{s} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} \delta t$$

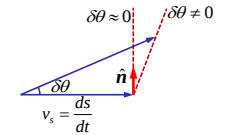
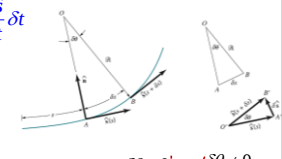
$$\delta \hat{s} = |\hat{s}| \delta \theta \hat{n} = \delta \theta \hat{n} \quad (\text{if limit } \delta t \rightarrow 0)$$

두 식을 결합하면,

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} \delta t = \delta \theta \hat{n} \rightarrow \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\delta t} \hat{n} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \hat{n}$$

v_s 를 양변에 곱하면,

$$v_s \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} = v_s \frac{\partial \theta}{\partial t} \hat{n} = \frac{\partial v_n}{\partial t} \hat{n}$$



$$v_s \times \delta \theta = \delta v_n \rightarrow v_s \times \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial v_n}{\partial t}$$

$$v_s \times \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta v_n}{\delta t} \rightarrow v_s \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial v_n}{\partial t}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.1 Newton's Second Law

유선(streamline)을 따르는 유체입자의 접선방향 및 구심 가속도

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) \hat{s} + v_s \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + v_s \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \right) \left\{ \begin{array}{l} v_s \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} = v_s \frac{\partial \theta}{\partial t} \hat{n} = \frac{\partial v_n}{\partial t} \hat{n} \\ \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \hat{n} = \frac{\delta \theta}{R \delta \theta} \hat{n} = \frac{\hat{n}}{R} \quad (\delta s = R \delta \theta) \end{array} \right.$$

$$= \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) \hat{s} + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_s^2}{R} \right) \hat{n}$$

a_s (접선 가속도) a_n (법선 가속도)

$$a_s = \frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s}, \quad a_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_s^2}{R}$$

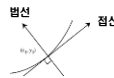
시간 항이 소거되어도 가속도가 존재할까?
 고등학교 수준: NO
 대학교 수준: Yes. Why? (구심가속도가 존재)

이제 정상유동(Steady flow, $\partial/\partial t=0$)에 대해 고려해 보자

(유선의 곡률에 의한 영향)

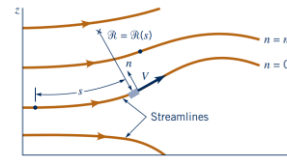
만약 시간에 따른 변화가 없는 정상유동(steady flow)의 경우: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\vec{a} = \left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) \hat{s} + \left(\frac{v_s^2}{R} \right) \hat{n} \rightarrow a_s = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s}, \quad a_n = \frac{v_s^2}{R}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.2 F=ma along a Streamline (유선을 따라 F=ma 적용)



$$\sum F = ma$$

$$F_B + F_{SN} + F_{ST} = ma$$

$$F_B + pA + \mu \frac{du}{dy} A = m(a_c + a_t)$$

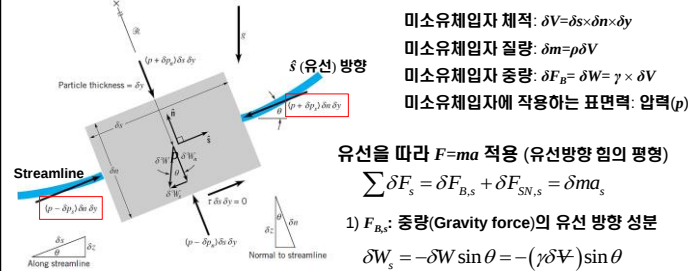
$$\vec{a} = \left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) \hat{s} + \left(\frac{v_s^2}{R} \right) \hat{n}$$

a_s a_n

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.2 F=ma along a Streamline

✓ 유선을 따라 $F=ma$ 적용(힘=압력+중력)한 경우에 대한 자유물체도 해석



1) $F_{B,s}$: 중량(Gravity force)의 유선 방향 성분

$$\delta W_s = -\delta W \sin \theta = -(\gamma \delta V) \sin \theta$$

2) $F_{SN,s}$: 유선 방향 표면력(Pressure force)

$$\delta F_{SN,s} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right) \delta n \delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right) \delta n \delta y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta V$$

Note: Taylor series expansion

$$\text{Left face: } p(x - \delta s) = p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}$$

$$\text{Right face: } p(x + \delta s) = p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.2 F=ma along a Streamline

중량의 유선방향 성분과 표면적(압력)을 $F=ma$ 에 대입하면,

Note: 유선방향 가속도

$$a_s = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s}$$

$$\begin{aligned} \sum \delta F_s &= \delta F_{B,s} + \delta F_{SN,s} = \delta m a_s = \delta m V \frac{\partial V}{\partial s} \\ &= \delta W_s + \delta F_{SN,s} = \rho \delta V V \frac{\partial V}{\partial s} \\ &= -\gamma \sin \theta \delta V - \frac{\partial p}{\partial s} \delta V = \rho \delta V V \frac{\partial V}{\partial s} \\ &= -\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} \end{aligned}$$

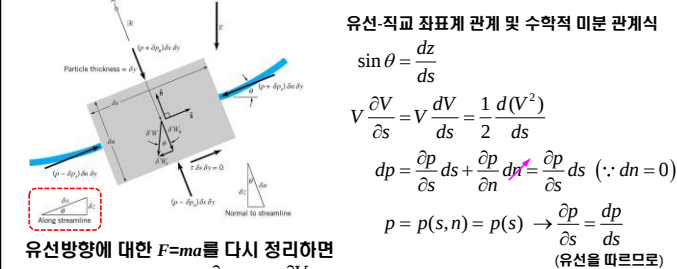
$$\therefore \rho a_s = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = -\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{Newton's second law along a streamline (s direction)}$$

Velocity change = Weight + Pressure change

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.2 F=ma along a Streamline

✓ 유선 방향에 대한 $F=ma$ 로부터 베르누이 방정식(에너지 방정식) 유도

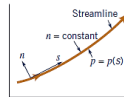


유선방향에 대한 $F=ma$ 를 다시 정리하면

$$-\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho a_s$$

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2} \rho \frac{d(V^2)}{ds}$$

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(V^2) + \gamma dz = 0$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.2 F=ma along a Streamline

비압축성 유체의 경우($\rho=\text{constant}$)

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(V^2) + \gamma dz = 0 \rightarrow p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = C$$

✓ 유선을 따르는 Bernoulli equation (베르누이 방정식)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C \quad (\text{along the streamline})$$

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = C \quad (\text{along the streamline})$$

$$\frac{p}{\gamma} (m) + \frac{1}{2g} V^2 (m) + z (m) = C \quad (\text{along the streamline})$$

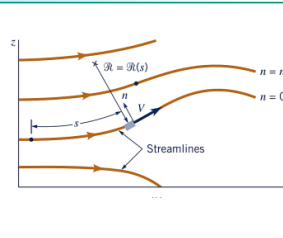
pressure head kinetic head potential head 비점성 유동에서, 유선을 따르는 유체입자가 가지는 (압력수두) (속도수두) (위치수두) (압력+운동+위치)에너지의 합은 항상 일정함을 의미

유선을 따르는 Bernoulli eq.을 유도하는 과정에서 적용한 3가지 가정

(1) steady flow of (2) incompressible fluid (3) without shearing stress (inviscid flow)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.3 F=ma Normal to a Streamline (유선에 수직하게 F=ma 적용)



$$\sum F = ma$$

$$F_B + F_{SN} + F_{ST} = ma$$

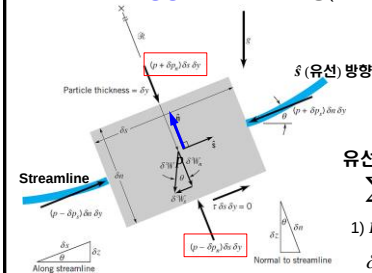
$$F_B + pA + \mu \frac{du}{dy} A = m(a_c + a_t)$$

$$\vec{a} = \underbrace{\left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right)}_{a_s} \hat{s} + \underbrace{\left(\frac{v_s^2}{R} \right)}_{a_n} \hat{n}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.3 F=ma Normal to a Streamline

✓ 유선에 수직한 방향을 따라 $F=ma$ 적용(힘=압력+중력)한 경우에 대한 자유물체도 해석



미소유체입자 체적: $\delta V = \delta s \times \delta n \times \delta y$

미소유체입자 질량: $\delta m = \rho \delta V$

미소유체입자 중량: $\delta F_B = \delta W = \gamma \times \delta V$

미소유체입자에 작용하는 표면력: 압력

유선에 수직한 방향을 따라 $F=ma$ 적용

$$\sum \delta F_n = \delta F_{B,n} + \delta F_{SN,n} = \delta m a_n$$

1) $F_{B,n}$: 중량(Gravity force)의 유선에 수직방향 성분

$$\delta W_n = -\delta W \cos \theta = -(\gamma \delta V) \cos \theta$$

2) $F_{SN,n}$: 유선에 수직한 방향 표면력(Pressure force)

$$\delta F_{SN,n} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\delta n}{2} \right) \delta s \delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\delta n}{2} \right) \delta s \delta y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial n} \delta s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial n} \delta V$$

Note: Taylor series expansion

$$\text{Upper face: } p(x - \delta p_n) = p - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\delta n}{2}$$

$$\text{Lower face: } p(x + \delta p_n) = p + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\delta n}{2}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.3 F=ma Normal to a Streamline

유선에 수직한 방향 중량과 표면적(압력)을 $F=ma$ 에 대입하면,

$$\sum \delta F_n = \delta F_{B,n} + \delta F_{SN,n} = \delta m a_n = \delta m \frac{V^2}{R}$$

Note: 유선에 수직한 방향 가속도

$$= \delta W_n + \delta F_{SN,n} = \rho \delta V \frac{V^2}{R}$$

$$= -\gamma \cos \theta \delta V - \frac{\partial p}{\partial n} \delta V = \rho \delta V \frac{V^2}{R}$$

$$= -\gamma \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$$

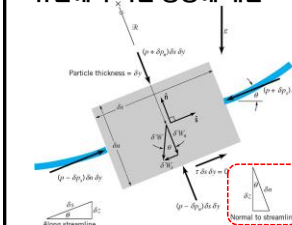
$$\therefore \rho a_n = \rho \frac{V^2}{R} = -\gamma \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{Newton's second law normal to a streamline (n direction)}$$

Velocity change = Weight + Pressure change

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.2 F=ma along a Streamline

✓ 유선에 수직한 방향에 대한 $F=ma$ 로부터 베르누이 방정식(에너지 방정식) 유도



유선-좌표 좌표계 관계 및 수학적 미분 관계식

$$\cos \theta = \frac{dz}{dn}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial s} ds + \frac{\partial p}{\partial n} dn = \frac{\partial p}{\partial n} dn \quad (\because ds = 0)$$

$$p = p(s, n) = p(n) \rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{dp}{dn}$$

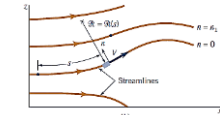
(유선에 수직한 방향을 따르므로)

유선에 수직한 방향에 대한 $F=ma$ 를 다시 정리하면

$$-\gamma \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R} = \rho a_n$$

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{dp}{dn} = \rho \frac{V^2}{R}$$

$$dp + \rho \frac{V^2}{R} dn + \gamma dz = 0$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.3 F=ma Normal to a Streamline

비압축성 유체의 경우($\rho=\text{constant}$)

$$dp + \rho \frac{V^2}{R} dn + \gamma dz = 0 \rightarrow p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = C$$

✓ 유선에 수직인 방향(법선 방향)을 따르는 Bernoulli eq. (베르누이 방정식)

$$\frac{p}{\rho} + \int \frac{\vec{V}^2}{R} dn + gz = C \text{ (normal to streamline)} \quad \text{(along the streamline)} \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + gz = C$$

$$p + \rho \int \frac{\vec{V}^2}{R} dn + \gamma z = C \text{ (normal to streamline)} \quad p + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 + \gamma z = C$$

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{1}{g} \int \frac{\vec{V}^2}{R} dn + z = C \text{ (normal to streamline)} \quad \underbrace{\frac{p}{\gamma}(m)}_{\text{pressure head}} + \underbrace{\frac{1}{2g} \vec{V}^2(m)}_{\text{kinetic head}} + \underbrace{z(m)}_{\text{potential head}} = C$$

(압력수두) (속도수두) (위치수두) 비점성 유동에서, 유선에 수직인 방향을 따르는 유체입자가 가지는 (압력+운동+위치)에너지의 합은 항상 일정함을 의미

유선에 수직인 방향을 따르는 Bernoulli eq.을 유도하는 과정에서 적용한 3가지 가정
(1) steady flow of (2) incompressible fluid (3) without shearing stress (inviscid flow)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.4 Physical Interpretation (물리적 해석)

정상유동(steady Flow)에서 유선을 따르는 유체 입자의 가속도
($\partial/\partial t = 0$)

$$\vec{a} = \underbrace{\left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right)}_{a_s} \hat{s} + \underbrace{\left(\frac{v_s^2}{R} \right)}_{a_n} \hat{n}$$

비점성 유체 유동(Inviscid Fluid Flow)에 대한 Bernoulli equation
 $\mu = 0$

$$p + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

$$p + \rho \int \frac{\vec{V}^2}{R} dn + \gamma z = C \text{ (normal to streamline)}$$

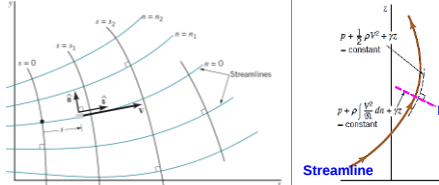
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.4 Physical Interpretation

✓ 유선의 접선 및 법선방향 Bernoulli equation (베르누이 방정식)

유체 입자에 $F=ma$ (운동방정식)를 적용하고 적분하여 얻은 결과

$$\vec{a} = \underbrace{\left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right)}_{a_s} \hat{s} + \underbrace{\left(\frac{v_s^2}{R} \right)}_{a_n} \hat{n}$$



$$p + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

$$p + \rho \int \frac{\vec{V}^2}{R} dn + \gamma z = C \text{ (normal to streamline)}$$

✓ 위 두 Bernoulli equation (베르누이 방정식)을 유도하는데 적용한 가정

- 1) 비점성 (inviscid fluid) : 에너지 손실이 없음
 - 2) 비압축성 (incompressible) : 밀도가 항상 일정
 - 3) 정상유동 (steady flow) : 시간 항이 소거됨
- 실제유동(real flow)과 차이가 있음 (실제유동에 적용하기 위해서는?)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.4 Physical Interpretation

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식) 각 항의 구성

: 압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지의 합으로 구성

$$p(N/m^2) + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 (N/m^2) + \gamma z (N/m^2) = C \text{ (along the streamline)}$$

$$\underbrace{\frac{p}{\gamma}(m)}_{\text{pressure head}} + \underbrace{\frac{1}{2g} \vec{V}^2(m)}_{\text{kinetic head}} + \underbrace{z(m)}_{\text{potential head}} = C \text{ (along the streamline)}$$

(압력수두) (속도수두) (위치수두)
(압력밀) (운동밀) (위치밀)
(압력에너지) (운동에너지) (위치에너지)

: 즉 Bernoulli eq.은(운동에너지 + 압력에너지 + 위치에너지)의 합은 유선을 따라 일정함을 의미
: 또는 유체입자에 작용하는 모든 힘들에 의해 행해진 일은 입자의 운동에너지 증가 량과 같다.

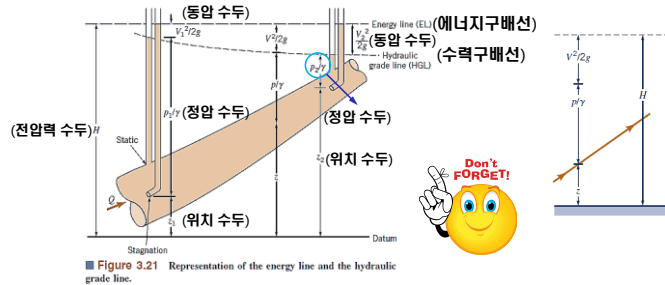
Note: Bernoulli eq. 유도는 알-에너지 원리를 이용하여 유도하는 것이 일반적임(5.4절에서 다룸)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.4 Physical Interpretation

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식) 각 항의 구성: 유선을 따르는 경우
: 압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지의 합으로 구성

$$\frac{p}{\gamma}(m) + \underbrace{\frac{1}{2g}\bar{V}^2(m)}_{\text{kinetic head}} + \underbrace{z(m)}_{\text{potential head}} = C \text{ (along the streamline)}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.4 Physical Interpretation

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식) 각 항의 구성: 유선에 수직인 경우
: 압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지의 합으로 구성

$$p + \rho \int \frac{\bar{V}^2}{R} dn + \gamma z = C \text{ (cross the streamline)}$$

$$\frac{p}{\gamma} + \underbrace{\frac{1}{g} \int \frac{\bar{V}^2}{R} dn}_{\text{kinetic head}} + \underbrace{z}_{\text{potential head}} = C \text{ (normal to streamline)}$$

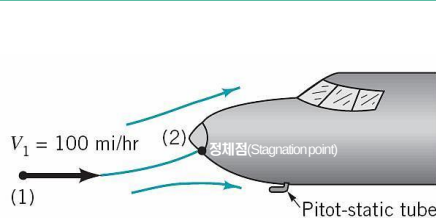
✓ 유체입자가 유선을 따라 곡선 운동 하는 경우

: (압력에너지+위치에너지) 변화에 의해 구심가속도가 발생하게 됨

: 만약 곡률반경이 무한대(직선운동)가 되면 구심가속도가 0이 되어 압력은 정수력 분포가 됨

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.5 Static, Stagnation, Dynamic, Total P. (정압, 정체압, 동압 및 전압)



정체 (Stagnation, 停滯):
사물이 발전하거나 나아가지 못하고 한
자리에 머물러 그림
정체점 (Stagnation point, 停滯點)
정상 흐름 속에 물체를 놓으면 흐름은 전
면의 한 점에서 흐름이 완전히 멈추어져
속도가 0이 되는 점.

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3) 압력(P)과 응력(σ, τ)

Classification of pressures

- 대기압 (atmospheric pressure, P_{atm})
 - 표준대기압 (standard atmospheric pressure)
 - 국소대기압 (local atmospheric pressure)
- 계기압 (gage pressure, P_{gag})
- 절대압 (absolute pressure, P_{abs}) = 국소대기압 + 계기압
- ✓ 정압 (static pressure, P_s)
- ✓ 동압 (dynamic pressure, P_d)
- ✓ 정체압 (stagnation pressure, P_t) = 정압 + 동압



정역학적
관점

동역학적
관점

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.5 정압, 정체압, 동압, 전압

✓ Terminologies (용어 정의)

- **정압**(static pressure, P_{static}): 운동 유체의 상대적인 정지상태 압력(운동에너지 제외, 열역학적 압력)
- **동압**(dynamic pressure, $P_{dynamic}$): 운동에너지를 **압력**에너지로 전부 변환 했을 때의 압력
- **정체점**(stagnation point): **속도가 0**이 되는 점 (운동에너지가 **압력**에너지로 전부 변환되는 점)
- **정체압**(stagnation pressure, $P_{stagnation}$) = 정체점에서의 압력 (= 정압 + 동압)
- **정수압**(hydrostatic pressure, P_{hydro}): 2장 유체정역학 기본방정식에 의한 압력($P=\gamma h$, 위치에너지)
- **전압**(total pressure, P_{total}) = 유체가 가지고 있는 전체 압력 (= 정압 + 동압 + 정수압)

✓ Bernoulli equation의 각 항 구성: (압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지)의 합은 일정

$$p(N/m^2) + \frac{1}{2}\rho V^2(N/m^2) + \gamma z(N/m^2) = C \text{ (along the streamline)}$$

$$\frac{p}{\gamma}(m) + \frac{1}{2g}V^2(m) + z(m) = C \text{ (along the streamline)}$$

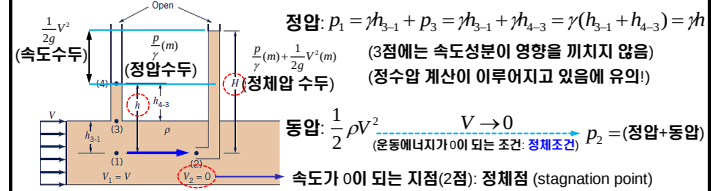
pressure head	kinetic head	potential head
(압력수두)	(속도수두)	(위치수두: 정수압 수두)
(압력일)	(운동일)	(위치일)
(압력에너지)	(운동에너지)	(위치에너지)



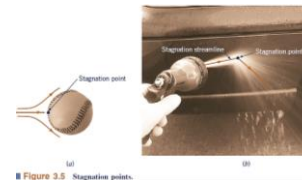
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.5 정압, 정체압, 동압, 전압

✓ 정압 및 동압 (static pressure and dynamic pressure)



✓ 정체점, 동압 및 정체압 (stagnation point, dynamic and stagnation pressures)



(1)점-2(점)에 대한 Bernoulli eq. 적용 ($z_1=z_2$)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 (=0) + \gamma z_2$$

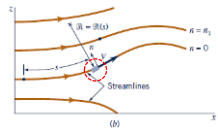
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2$$

stagnation pressure	static pressure	dynamic pressure
(정체압)	(정압)	(동압)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.5 정압, 정체압, 동압, 전압

✓ 전압 (total pressure) = 정압(압력에너지) + 동압(운동에너지) + 정수압(위치에너지)



$$p(N/m^2) + \frac{1}{2}\rho V^2(N/m^2) + \gamma z(N/m^2) = C \text{ (along the streamline)}$$

$$\frac{p}{\gamma}(m) + \frac{1}{2g}V^2(m) + z(m) = C \text{ (along the streamline)}$$

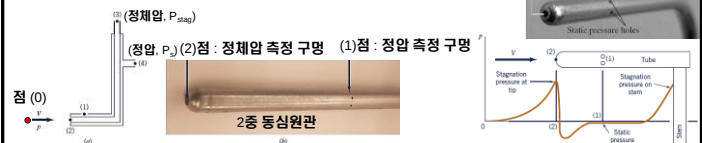
pressure head	kinetic head	potential head
(압력수두)	(속도수두)	(위치수두: 정수압 수두)
(압력일)	(운동일)	(위치일)
(압력에너지)	(운동에너지)	(위치에너지)

비점성 유체유동에서 유선을 따르는 유체입자가 갖는 전압은 항상 일정하며, 그 성분은 정압(압력에너지) + 동압(운동에너지) + 정수압(위치에너지)로 구성되어 있음.
(에너지 손실이 없는 비점성 유동의 경우: 실제 유동은 에너지 손실을 고려해 주어야 함)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.5 정압, 정체압, 동압, 전압

✓ 피토 정압관(Pitot-static tube)을 이용한 유체 속도측정



점 (1)과 점(4)의 높이 차를 무시하면, $p_4 = p_1 = p$
점 (2)와 점(3) 사이의 에너지 손실을 무시하면, $p_2 = p_3$
점 (0)과 점 (2)에 대해 Bernoulli eq. 적용 ($z_0=z_2$)하면,
 $p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z_0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 (=0) + \gamma z_2$

$$p_2 - p = \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (p_2 = p_4, \quad p = p_4)$$

$$p_2 - p_4 = \frac{1}{2}\rho V^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_4)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p_{2-4}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(p_{stagn} - p_{static})}{\rho}}$$

((2)-(3) 사이의 에너지 손실이 고려되지 않은 이론적인 속도값)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

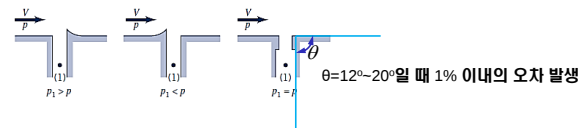
3.5 정압, 정체압, 동압, 전압

✓ 피토 정압관(Pitot-static tube)을 이용한 속도 측정 예



Figure 3.7 Airplane Pitot-static probe. (a) Schematic, (b) Photograph (Photograph courtesy of Aero-Instruments Co., LLC.)

✓ 정확한 정압 측정을 위한 압력 탭(pressure tap) 설치



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6 Examples of Use of the Bernoulli Equation (응용 예)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6 Examples of Use of the Bernoulli E.

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식) 각 항의 구성

: 압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지의 합으로 구성

$$p(N/m^2) + \frac{1}{2} \rho V^2(N/m^2) + \gamma z(N/m^2) = C \text{ (along the streamline)}$$

$$\frac{p}{\gamma}(m) + \frac{1}{2g} V^2(m) + z(m) = C \text{ (along the streamline)}$$

pressure head kinetic head potential head
(압력수두) (속도수두) (위치수두)
(압력밀) (운동밀) (위치밀)
(압력에너지) (운동에너지) (위치에너지)

✓ 두 점 (1) - (2)에 대한 Bernoulli equation (베르누이 방정식) 적용 : 제한조건 확인

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2 \quad \text{변수 6개}$$

미지수(6) - 방정식(2) = 4

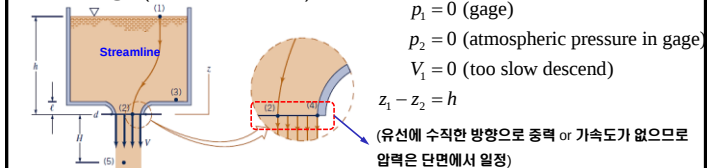
$A_1 V_1 = A_2 V_2 = Q$ (volume flowrate): 연속방정식 (주어진 변수를 찾는 것이 중요)

$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \dot{m}$ (mass flowrate)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.1 Free jet (자유제트)

✓ 토리첼리 공식(Torricelli's formula)



• 두 점 (1) - (2)에 대한 Bernoulli equation (베르누이 방정식) 적용 : 제한조건 확인

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

$$\gamma(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \rho V_2^2 \rightarrow \gamma h = \frac{1}{2} \rho V^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2(\gamma h)}{\rho}} = \sqrt{2gh}$$

(점성이 무시될 때 위치에너지가 운동에너지로 변환)

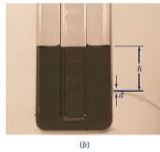
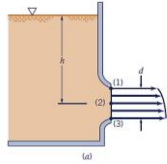
• 두 점 (1) - (5)에 대한 Bernoulli equation (베르누이 방정식) 적용

$$V = \sqrt{2g(h+H)} \quad (\text{높이 차에 의존})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.1 Free jet (자유제트)

✓Bernoulli 방정식(이론)과 실제 유동의 차이

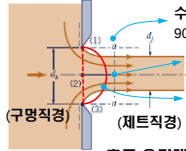


$$V = \sqrt{2gh}$$

(h 변화에 따라 v가 달라지게 됨)

만약, $d \ll h$ 인 경우

중심선의 속도를 평균속도로 사용



수축현상(vena contracta): 유체 흐름 관성에 의해 90°로 꺾이지 않기 때문에 발생하는 현상

압력분포 균일 단면(a-a): Bernoulli eq. 적용 가능한 단면

(구멍직경)

압력분포 불균일: 중심부에서 최대, 가장자리에서 최소 $p_1 = p_2 = 0$ (압력불균일 → 속도 불균일: 베르누이 방정식 적용 불가)

출구 유량계산 (volume flowrate):

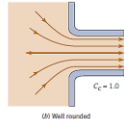
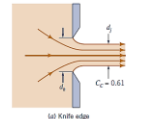
$$Q_{actual} = A_{a-a} V_{a-a} \text{ (volume flowrate)}$$

$$= C_c A_{geometry} V_{a-a} \text{ (} C_c \text{: contraction coefficient)}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.1 Free jet (자유제트)

✓다양한 출구면적 형상에 따른 수축현상 고려(수축계수: C_c)

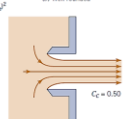
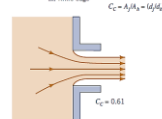


$$Q_{actual} = A_{a-a} V_{a-a} \text{ (volume flowrate)}$$

$$= C_c A_{geometry} V_{a-a} \text{ (} C_c \text{: contraction coeff.)}$$

$$A_{a-a} = C_c A_{geometry}$$

$$C_c = \frac{A_{a-a}}{A_{geometry}} = \frac{A_{jet}}{A_h}$$



✓실제 유동에서 마찰과 수축을 고려한 유량

$$Q_{actual} = A_{a-a} V_{(a-a)actual} \text{ (volume flowrate)}$$

$$= C_c A_{geometry} C_v V_{(a-a)ideal}$$

$$= C_c \times C_v A_{geometry} V_{(a-a)ideal}$$

$$= C_d A_{geometry} V_{(a-a)ideal}$$

$$= C_d A_{geometry} \sqrt{2gh}$$

$$\text{수축계수: } C_c = \frac{A_{a-a}}{A_{geometry}} = \frac{A_{jet}}{A_h}$$

$$\text{속도계수: } C_v = \frac{V_{(a-a)actual}}{V_{(a-a)ideal}} = \frac{V_{(a-a)actual}}{\sqrt{2gh}}$$

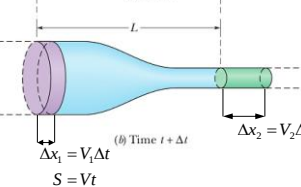
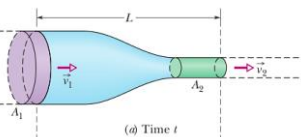
$$\text{유량계수: } C_d = C_c \times C_v = \frac{A_{jet} V_{(a-a)actual}}{A_h \sqrt{2gh}}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.2 Confined Flow (간힌 유동)

✓Principle of continuity(연속의 원리)

정상상태, 연속적인 유체 흐름에 질량보존법칙을 적용하여 얻어진 식
“관 속을 흐르는 유체의 질량유량(단위시간당 질량)은 어느 점에 있어도(단면적이 변화하더라도) 일정하다”는 원리



• Volume (체적, $\mathcal{V}$)

$$\mathcal{V} = A\Delta x = AV\Delta t$$

• Volume flowrate (체적유량, Q)

$$Q = \frac{\mathcal{V}}{\Delta t} = \frac{A\Delta x}{\Delta t} = \frac{AV\Delta t}{\Delta t} = AV$$

• Mass (질량, m)

$$m = \rho\mathcal{V} = \rho A\Delta x = \rho AV\Delta t$$

• Mass flowrate (질량유량, $\dot{m}$)

$$\dot{m} = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho\mathcal{V}}{\Delta t} = \frac{\rho A\Delta x}{\Delta t} = \frac{\rho AV\Delta t}{\Delta t} = \rho AV$$

• Weight (중량, W)

$$W = mg = \rho Vg = \rho g A\Delta x = \rho g AV\Delta t$$

• Weight flowrate (중량유량, $\dot{W}$)

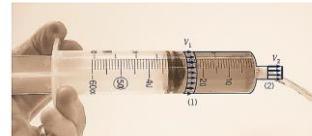
$$\dot{W} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\rho Vg}{\Delta t} = \frac{\rho g A\Delta x}{\Delta t} = \rho g AV = \gamma AV$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

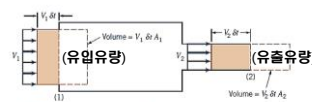
3.6.2 Confined Flow (간힌 유동)

✓연속 방정식(continuity equation): 질량보존법칙

질량은 생성되거나 소멸되지 않는다.



- 1) 밀폐된 공간 내 유동하는 유체 질량은 보존됨.
즉, (1) 단면으로 유입된 만큼 (2) 단면으로 유출
- 2) 단면적 변화에 따라 속도가 변화함
- 3) 속도 (운동에너지) 변화에 따라 각 지점의 압력 (압력에너지)이 동시에 변화함
- 4) 속도와 압력이 동시에 변화하므로 베르누이 방정식과 함께 연속방정식을 적용해야 함



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

• Volume flowrate (체적유량, Q)

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

• Mass flowrate (질량유량, $\dot{m}$)

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

$$A_1 > A_2 \quad Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 < V_2 \quad H = \frac{1}{2} \rho V^2 + p + \gamma z$$

$$z_1 = z_2$$

$$p_1 > p_2 \quad H = p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.2 Confined Flow (갇힌 유동)

✓ 공동현상(cavitation)

액체의 압력이 증기압까지 떨어질 때 발생하는 액체의 비등 현상

예) 물의 증기압: 101.3 kPa(대기압) → 100°C, 3.5 kPa → 27°C

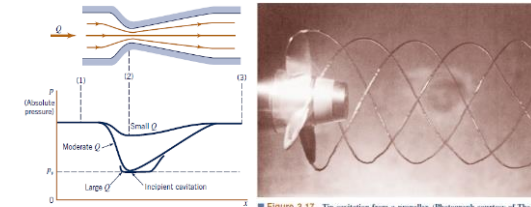


Figure 3.16 Pressure variation and cavitation in a variable area pipe.

Figure 3.17 Tip cavitation from a propeller. (Photograph courtesy of The Pennsylvania State University, Applied Research Laboratory, Garfield Thomas Water Tunnel.)

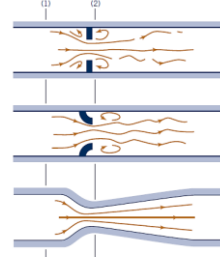
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

✓ Bernoulli eq.을 응용한 유량측정 장치: 오리피스, 노즐, 벤투리(모두 동일한 식을 사용)

유동 관로 내 저항물체를 삽입하여 압력-속도 변화 관계를 이용하여 유량을 측정

3장에서는 점성 및 압축성 등 제반 손실을 고려하지 않고 이상적인 유량계만 다룸 (이론값)



두 점 (1) - (2)에 대한 Bernoulli equation 적용 ($z_1 = z_2$)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

두 점 (1) - (2)에 대한 연속방정식 적용

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (\text{속도는 단면에서 균일: 평균속도 이용})$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{Q}{A_2} \right)^2 - \left(\frac{Q}{A_1} \right)^2 \right]$$

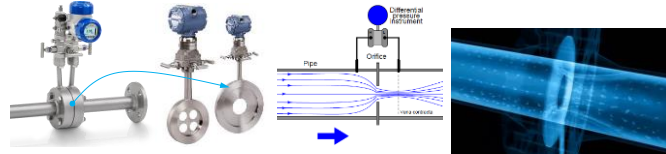
$$\left. \begin{array}{l} A_1 > A_2 \\ V_1 < V_2 \\ p_1 > p_2 \end{array} \right\} \text{속도 증가} \rightarrow \text{압력저하 (측정값)}$$

$$z_1 = z_2$$

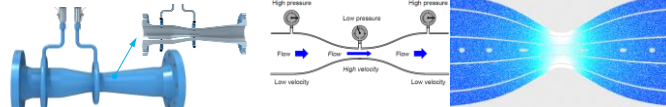
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

• 오리피스 미터(Orifice flowmeter)



• 벤투리 미터(Venturi flowmeter)



• 유동 노즐(Flow nozzle)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{Q}{A_2} \right)^2 - \left(\frac{Q}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{2} \left[\frac{Q^2 (A_1^2 - A_2^2)}{A_2^2 A_1^2} \right]$$

$$Q^2 = \frac{2(p_1 - p_2) A_1^2 A_2^2}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} = A_2^2 \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho [1 - (A_2 / A_1)^2]}$$

$$Q_{ideal} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho [1 - (A_2 / A_1)^2]}} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho [1 - \beta^4]}}$$

$$(\beta = D_2 / D_1)$$

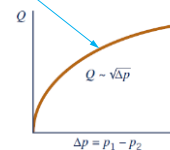
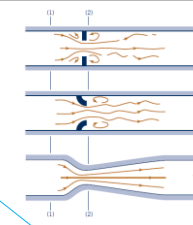
(제반 손실을 무시한 이론적으로 계산된 유량)

$$Q_{actual} = C_d Q_{ideal}$$

$$= C_c C_v Q_{ideal}$$

$$= C_c \times C_v A_{geometry} V_{ideal}$$

(제반 손실을 고려한 실제 유량)



(유량은 압력 차의 제곱근에 비례)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

수축현상(vena contracta) 및 제반 손실(속도손실) 고려한 실제 유량계산(actual flowrate)

- 1) 수축현상: 유체관성에 의한 분류의 수축 (수축계수 C_c 적용)
(저항 물체의 기하학적 면적은 알 수 있지만 실제 분류의 면적은 알 수 없음)

$$A_{jet} = C_c \times A_{geometry} \rightarrow C_c = \frac{A_{jet}}{A_h}$$

- 2) 제반손실: 유체 흐름에 따른 에너지 손실 (속도 손실) (속도계수 C_v 적용)
(충돌, 난류 손실 등이 있으나 개별적 항으로 구분하기 어려움으로 총 손실 고려)

$$V_{actual} = C_v \times V_{ideal} \rightarrow C_v = \frac{V_{actual}}{V_{ideal}}$$

- 3) 총손실: 수축현상 및 제반 에너지 손실을 고려 (유량계수 C_d 적용)

$$C_d = C_c \times C_v = \frac{A_{jet}}{A_{geometry}} \cdot \frac{V_{actual}}{V_{ideal}} = \frac{Q_{actual}}{Q_{ideal}}$$

- 4) 실제유량 계산: 수축현상 및 제반 에너지 손실을 고려 (유량계수 C_d 적용) 한 실제 유량

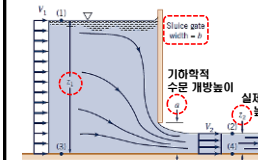
$$\begin{aligned} Q_{actual} &= C_d \times Q_{ideal} \quad (\text{volume flowrate}) \\ &= C_d \times A_{geometry} \cdot V_{ideal} \\ &= C_c \times C_v \times A_{geometry} \cdot V_{ideal} \quad \text{따라서 구해야 하는 것은 } C_d \text{ 임} \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

✓Bernoulli eq.을 응용한 유량 측정장치: 수문(slucice gate)

수문 내 저수조의 압력수두와 수문 출구의 압력수두 차를 이용하여 유량을 측정



자유표면 위 두 점 (1)-(2)에 대한 Bernoulli equation 적용

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

두 점 (1)-(2)에 대한 연속방정식 적용($A_1 = b z_1, A_2 = b z_2$)

$$Q = A_1 V_1 = b V_1 z_1 = A_2 V_2 = b V_2 z_2$$

$$\begin{aligned} \text{(상류 균일속도분포)} \quad p_1 &= p_2 = 0(\text{gage}) \quad \text{(하류 균일속도분포)} \quad \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 (= p_3) = \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2 (= p_4) \\ p_1 &= p_2 = 0(\text{gage}) \end{aligned}$$

$$A_{jet} = C_c \times A_{geometry}$$

$$C_c = \frac{A_{jet}}{A_h} = \frac{z_2 b}{ab} = \frac{z_2}{a}$$

$$\approx 0.61 \left(0 < \frac{z_2}{a} < 0.20 \right)$$

$$\begin{aligned} p_3 - p_4 &= \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) \quad \text{속도분포가 균일하면 압력변화가 없음 즉, 수직적 압력만 중력방향으로 존재} \\ p_3 - p_4 &= \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{Q}{b z_2} \right)^2 - \left(\frac{Q}{b z_1} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q^2 (z_1^2 - z_2^2)}{b^2 z_2^2 z_1^2} \right)$$

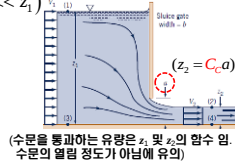
$$Q^2 = \frac{2(p_3 - p_4) b^2 z_2^2 z_1^2}{\rho (z_1^2 - z_2^2)} = b^2 z_2^2 \frac{2(p_3 - p_4)}{\rho [1 - (z_2/z_1)^2]} = b^2 z_2^2 \frac{2\gamma (z_1 - z_2)}{\rho [1 - (z_2/z_1)^2]}$$

$$= b^2 z_2^2 \frac{2g (z_1 - z_2)}{[1 - (z_2/z_1)^2]}$$

$$Q = b z_2 \sqrt{\frac{2g (z_1 - z_2)}{[1 - (z_2/z_1)^2]}} = b z_2 \sqrt{2g z_1} \quad (\text{for } z_2 \ll z_1)$$

$$Q = C_c b a \sqrt{\frac{2g (z_1 - z_2)}{[1 - (z_2/z_1)^2]}} \quad (\leftarrow z_2 = C_c a)$$

(실제유량은 마찰손실을 고려해야 함)
(구해야 하는 값 또는 알아야 하는 값)



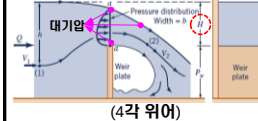
(수문을 통과하는 유량은 z_1 및 z_2 의 함수임. 수문의 열림 정도가 아님에 유의)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

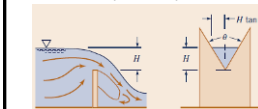
3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

✓Bernoulli eq.을 응용한 유량 측정장치: 위어(Weir)

사각 또는 삼각형 모양의 장치 위에 싸여진 유체 높이(h)를 이용하여 유량을 측정



(4각 위어)



(3각 위어)



$$p_2 = 0(\text{gage}), \quad p_1 = \gamma h$$

- 1) 4각 위어의 경우

위어 위쪽단면의 평균속도: $V = \sqrt{2gH}$

직사각형 위어의 단면적: $A_{rectangle} = Hb$

$$\text{유량: } Q = C_d H b \sqrt{2gH} = C_d b \sqrt{2g} H^{3/2}$$

- 2) 3각 위어의 경우

위어 위쪽단면의 평균속도: $V = \sqrt{2gH}$

직삼각형 위어의 단면적: $A_{triangle} = H \times (H \tan(\theta/2))$

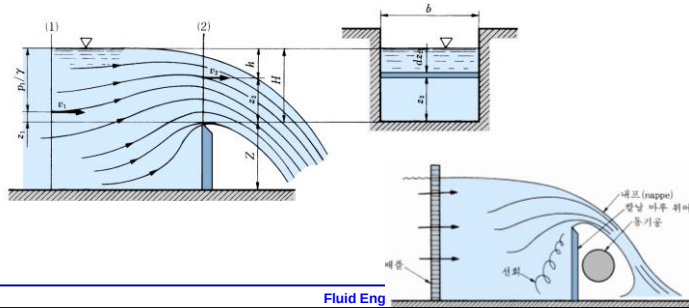
$$\begin{aligned} \text{유량: } Q &= AV = H^2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) (C_d \sqrt{2gH}) \\ &= C_d \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{2g} H^{5/2} \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

✓ Basic assumption to measure flow rate of notch and weir

- ① 노치상류에서 유체입자의 속도분포는 균일(정압, $p=\gamma h$)에 따른다.
- ② 속도분포는 노치에 수직
- ③ 노치 위의 자유표면의 압력은 대기압 (즉, nappe 압력은 p_{atm})
- ④ 점성 및 표면장력 무시



Fluid Eng

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

✓ 4각 weir

(1)-(2)점의 에너지 평형

$$V_1 \ll V_2 \rightarrow V_1 \approx 0, \quad p_2 = p_{atm} = 0$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \left(H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right)$$

$$V_2 = \sqrt{2g(H - z_2)}$$

Calculation of flow rate

V_2 는 z_2 의 위치에 따라 변하므로

$$dQ_{th} = V_2 dA = V_2 b dz_2 = b \sqrt{2g(H - z_2)} dz_2$$

$$= b \sqrt{2g(H - z_2)} (-dh) \quad (h = H - z_2 \rightarrow dh = -dz_2)$$

$$Q_{th} = b \int_H^0 \sqrt{2g(H - z_2)} (-dh) = b \int_0^H \sqrt{2g(H - z_2)} (dh)$$

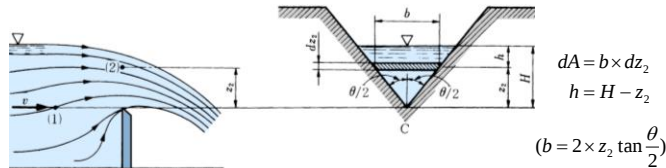
$$= b \sqrt{2g} \frac{2}{3} \left[h^{\frac{3}{2}} \right]_0^H = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

$$Q_{act} = C_d \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \quad Q = C_d b \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

✓ 3각 weir (V-notch)



(1)-(2)점의 에너지 평형

$V_1 \ll V_2 \rightarrow V_1 \approx 0, \quad p_2 = p_{atm} = 0$ (from assumption), $z_1 = 0$ (baseline)

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \left(H = \frac{p_1}{\gamma} \right)$$

$$V_2^2 = 2g(H - z_2)$$

$$V_2 = \sqrt{2g(H - z_2)}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.6.3 Flow Measurement (유량측정)

Calculation of flow rate

$$dQ_{th} = V_2 dA = V_2 b dz_2 = b \sqrt{2g(H - z_2)} dz_2 \quad (b = 2 \times z_2 \tan \frac{\theta}{2})$$

$$= 2 \times z_2 \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g(H - z_2)} dz_2$$

$$= 2 \times (H - h) \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2gh} dz_2 \quad (h = H - z_2 \rightarrow dh = -dz_2)$$

$$= 2 \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} (H - h) h^{\frac{1}{2}} (-dh)$$

$$Q_{th} = 2 \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} \int_H^0 (H - h) h^{\frac{1}{2}} (-dh) = 2 \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} \int_0^H (H - h) h^{\frac{1}{2}} (dh)$$

$$= 2 \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} H h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} \right]_0^H = 2 \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} \left(\frac{2}{3} H^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} H^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$= \frac{8}{15} \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}}$$

$$Q_{act} = C_d \frac{8}{15} \times \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}} \quad Q = C_d \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.7 Energy Line, Hydraulic Grade Line (에너지선과 수력구배선)

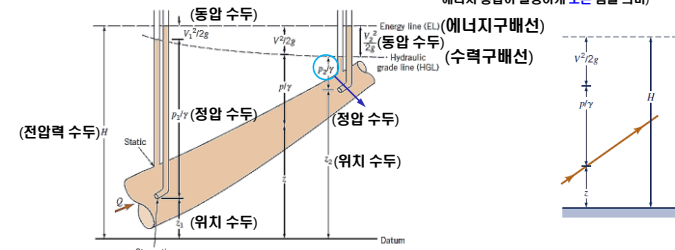
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.7 Energy Line, Hydraulic Grade Line

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식) 각 항의 구성: 유선을 따르는 경우
: 전에너지=(압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지): 에너지 구배선으로 표현

$$\frac{p}{\gamma}(m) + \underbrace{\frac{1}{2g}\vec{V}^2(m)}_{\text{kinetic head}} + \underbrace{z(m)}_{\text{potential head}} = C \text{ (along the streamline)}$$

(에너지구배선이 일정하다는 것은 관내 유체의 에너지 총합이 일정하게 보존됨을 의미)



Note: 점성의 영향을 고려하면 에너지 손실이 유동방향으로 따라 발생하므로 에너지 구배선은 유동방향으로 감소한다.

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

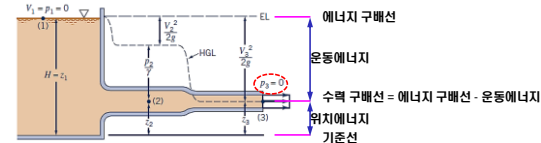
3.7 Energy Line, Hydraulic Grade Line

✓ 에너지 구배선을 나타내는 몇 가지 예: 직관적 이해에 매우 유용

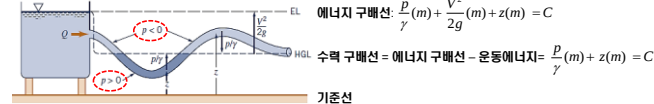
전에너지(=압력에너지 + 운동에너지 + 위치에너지)를 에너지 구배선으로 표현

$$\frac{p}{\gamma}(m) + \underbrace{\frac{1}{2g}\vec{V}^2(m)}_{\text{kinetic head}} + \underbrace{z(m)}_{\text{potential head}} = C \text{ (along the streamline)}$$

• 속도(운동에너지)가 변하는 경우



• 속도(운동에너지)가 일정한 경우



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8 Restrictions on Use of the Bernoulli Equation (Bernoulli Eq.의 사용 제한조건)

Bernoulli Equation

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = C \text{ (cross the streamline)}$$

• 4가지 조건: 비압축성, 비점성, 정상상태, 유선을 따르는 유동

• 추가적 조건: 1) 유선이 경계층(boundary layer)을 통과하여서는 안 된다.

2) 외부와의 에너지 교환은 없다.

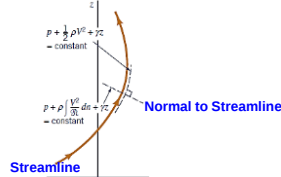
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8 Restrictions of the Bernoulli E.

✓ 유선의 점선 및 법선방향 Bernoulli equation (베르누이 방정식: 에너지 방정식)
유체 입자에 $F=ma$ (운동방정식)를 적용하고 적분하여 얻은 결과

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = C \text{ (cross the streamline)}$$



✓ 위 두 Bernoulli equation (베르누이 방정식)을 유도하는데 적용한 가정

- 1) 비점성 (inviscid fluid) : 에너지 손실이 없음 → 제반손실 고려 (C_D, H_{Loss})
- 2) 비압축성 (incompressible) : 밀도가 항상 일정 → 밀도변화 고려
- 3) 정상유동 (steady flow) : 시간 항이 소거됨 → 시간에 따른 변화 고려 (비정상 유동 특성)
- 4) 유선 (Stream line)을 따르는 유동

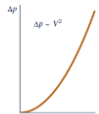
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.1 압축성의 영향

✓ 유선을 따르는 Bernoulli eq. : 밀도가 일정한 경우

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

$$\text{밀도가 일정할 경우: 정체압}(p_{\text{stag}}) - \text{정압}(p_{\text{static}}) = \text{동압}(p_{\text{dynamic}}) = \frac{1}{2}\rho V^2$$



압력은 속도 제곱에 비례

✓ 밀도가 변화(압축성) 하는 경우의 Bernoulli eq.

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

$$1) \text{ 등온변화의 경우: } pV = RT = C \rightarrow \rho = p / RT$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \int d(V^2) + g \int dz = 0 \quad \frac{RT}{g} \ln p_1 + \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 = \frac{RT}{g} \ln p_2 + \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$$

$$RT \int \frac{dp}{p} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$$

$$RT \ln p + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$$

$$\frac{RT}{g} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) + \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 = \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2$$

비점성, 등온압축 유동 Bernoulli eq.

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + \frac{(p_1 - p_2)}{p_2} = 1 + \varepsilon \rightarrow \varepsilon \ll 1 \text{ (small pressure diff.)}$$

(압력 차가 작은 경우 비압축성 Bernoulli eq. 이 된다)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.1 압축성의 영향

2) 등엔트로피(가역단열) 유동의 경우 : 마찰이 없고 열교환이 없는 유동

$$pV^k = \frac{p}{\rho^k} = \text{Constant} \rightarrow p = \rho^k C \rightarrow \rho = p^{1/k} C^{-1/k} \rightarrow C^{1/k} \rho = p^{1/k} \rho^{-1}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \int d(\tilde{V}^2) + g \int dz = 0$$

$$C^{1/k} \int p^{-1/k} dp + \frac{1}{2} \tilde{V}^2 + gz = C \rightarrow C^{1/k} \int_{p_1}^{p_2} p^{-1/k} dp = C^{1/k} \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[p_2^{(k-1)/k} - p_1^{(k-1)/k} \right]$$

$$\left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \tilde{V}^2 + gz = C = \left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

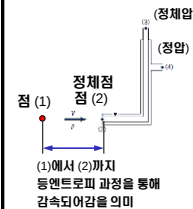
$$\left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 \quad \text{압축성, 등엔트로피 유동 Bernoulli eq.}$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.1 압축성의 영향

✓ 비압축성과 압축성 유동의 Bernoulli Eq. 차이 (국소 등엔트로피 정체조건 검토)



1) 압축성의 경우

만약 $z_1 = z_2$ 이고,

(1) 점은 상류, (2) 점은 정체점을 나타낼 때 압력비는 아래와 같음

$$\frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{p_1 - p_2}{p_2} = \varepsilon = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2 \right)^{k/(k-1)} - 1 \right] \quad (\text{압축성})$$

$$= \frac{k Ma_1^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} Ma_1^2 + \frac{2-k}{24} Ma_1^4 + \dots \right) \quad (\text{for } Ma \ll 1)$$

(유동 과정은 다음 슬라이드 국소 등엔트로피 정체 조건 참조)

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{\text{Fluid velocity}}{\text{Sound speed}} = \frac{V}{\sqrt{kRT}}$$

2) 비압축성의 경우

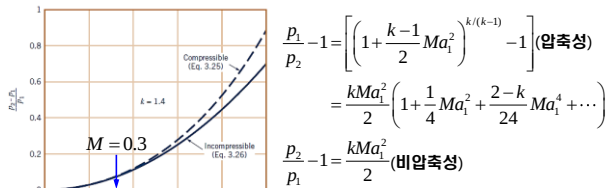
$$\Delta p = (p_2 - p_1) = \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

$$\frac{(p_2 - p_1)}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\rho V_1^2}{2 p_1} = \frac{\rho_1 V_1^2}{2 \rho_1 RT_1} = \frac{V_1^2}{2 RT_1} = \frac{Ma_1^2 (\sqrt{kRT_1})^2}{2 RT_1} = \frac{k Ma_1^2}{2} \quad (\text{비압축성})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.1 압축성의 영향

3) 두 경우에 대한 비교



Mach number 0.3까지 2% 범위 내에서 일치 : 이상기체 유동을 비압축성으로 취급한다.

표준공기의 경우 비압축성 속도 범위

$$T_1 = 15^\circ\text{C} (288\text{K}), c_1 = \sqrt{kRT_1} = 340\text{m/s}$$

$$V_1 = Ma_1 c_1 = 0.3 \times 340\text{m/s} = 102\text{m/s} = 367\text{km/h}$$

(즉, 100 m/s 이내 유동은 비압축성 유동으로 가정해도

0.2% 범위 내에서 일치 함을 의미)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.2 비정상(unsteady) 효과

✓ 유선을 따르는 Bernoulli eq. : 정상유동의 경우

$$p + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

비정상유동(unsteady)의 경우 유체입자의 접선방향 및 구심 가속도

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right)}_{a_s} \hat{s} + \underbrace{\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_s^2}{R} \right)}_{a_n} \hat{n}, \quad a_s = \frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s}, \quad a_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_s^2}{R}$$

비정상 항 을 고려해 주어야 함

정상유동(steady flow)의 경우

$$\vec{a} = \underbrace{\left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \right)}_{a_s} \hat{s} + \underbrace{\left(\frac{v_s^2}{R} \right)}_{a_n} \hat{n}, \quad a_s = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s}, \quad a_n = \frac{v_s^2}{R}$$

✓ 비정상유동(unsteady)의 경우 유선을 따르는 Bernoulli eq.

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(\vec{V}^2) + \gamma dz = 0 \text{ (정상유동)}$$

$$\rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds + dp + \frac{1}{2} \rho d(\vec{V}^2) + \gamma dz = 0 \text{ (비정상유동)}$$

Note:

비정상유동의 경우

$\partial v/\partial t$ 항 적용이 어려움

적분 단순화를 위해 비회전유동,

속도포텐셜 개념을 이용

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.3 회전 효과(Rotational effects)

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식)을 유도하는데 적합한 가정

- 1) 비점성 (inviscid fluid) : 에너지 손실이 없음
- 2) 비압축성 (incompressible) : 밀도가 항상 일정
- 3) 정상유동 (steady flow) : 시간 항이 소거됨
- 4) 유선을 따르는 유동 (동일 유선 위의 점에 대해서만 계산)

✓ 유선을 가로질러 Bernoulli equation을 적용할 때의 주의 사항

각 유선마다 고유한 Bernoulli 상수값을 갖는다.

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = C \text{ (along the streamline)}$$

그러나 아주 특수한 경우 유동장 전체가 동일한 상수 값을 갖는 경우가 있음 (예제 참조)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

3.8.4 그 밖의 제한 조건

✓ Bernoulli equation (베르누이 방정식)을 유도하는데 적합한 가정

- 1) 비점성 (inviscid fluid) : 에너지 손실이 없음
- 2) 비압축성 (incompressible) : 밀도가 항상 일정
- 3) 정상유동 (steady flow) : 시간 항이 소거됨
- 4) 유선을 따르는 유동 (동일 유선 위의 점에 대해서만 계산)

점성이 없는 경우: 보존계 (conservative system), 에너지가 일정하게 보존

점성이 있는 경우: 비보존계 (nonconservative, dissipative), 에너지 손실이 발생. 5장에서 다룸

✓ 그 밖의 제한 조건

유선상의 두 점 사이에 어떠한 기계장치도 포함되어 있지 않음

만약 펌프나 터빈과 같은 기계장치가 포함될 경우 이 장치들을 포함하도록 베르누이 방정식이 변형되어야 함. 5장 및 12장에서 다룸

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Homework #4

✓ Problem set for Ch. 3

**8, 12, 20, 24, 34,
36, 44, 46, 52, 58,
65, 70, 82, 102, 118,
(15 problems)**

65) $Q=0.18\text{m}^3/\text{s}$, $V_3=39\text{m/s}$, $p_4=738\text{kN/m}^2$

제출기한: chapter 3. 시험 보기 직전