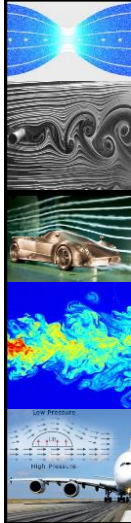


for 2nd grade undergraduate students

Ch. 4 Fluid Kinematics



Professor Jeekeun Lee
Fluid Mechanics Laboratory
Division of Mechanical System Engineering
College of Engineering, JBNU, Republic of Korea

Ch. 4 Fluid Kinematics

4.1 The Velocity Field (속도장)

4.2 The Acceleration Field (가속도장)

4.2.1 The Material Derivative (물질도함수)

4.2.2 Unsteady Effects (비정상효과)

4.2.3 Convective Effects (대류효과)

4.2.4 Streamline Coordinates (유선좌표계)

4.3 Control Volume and System Representations (CV, 검사체적)

4.4 The Reynolds Transport Theorem (RTT, 레이놀드 수송정리)

4.5 Chapter Summary and Study Guide (요약 및 학습안내)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Learning Objectives in Ch.4



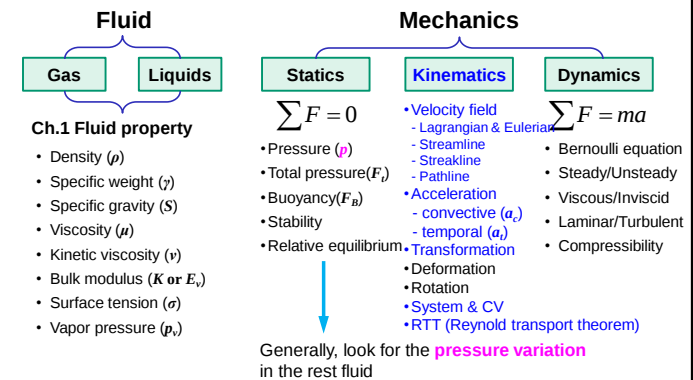
- ✓ discuss the differences between the **Eulerian** and **Lagrangian** descriptions of fluid motion.
- ✓ identify various flow characteristics based on the **velocity field**.
- ✓ determine the streamline pattern and **acceleration field** given a **velocity field**.
- ✓ discuss the differences between a **system** and **control volume**.
- ✓ apply the **Reynolds transport theorem** and the **material derivative**



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Ch.4 Fluid kinematics

✓ Fluid kinematics(유체 운동학)



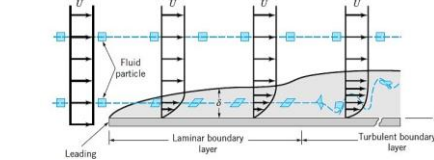
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Ch.4 Fluid kinematics

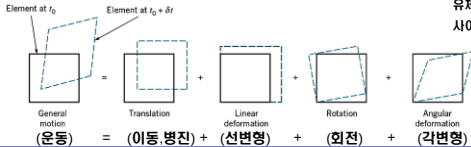
✓ Fluid kinematics (유체 운동학)

유체입자 운동의 원인인 힘을 고려하지 않고 **유체 입자의 운동**만을 고찰(고전물리학의 한 분야)
유체입자의 운동(병진, 이동, 선변형, 각변형, 회전)을 공간(x, y, z) 및 시간(t)의 함수로 계산

✓ Motion of a Fluid Element=Translation+ Rotation+ Deformation (linear & angular)



✓ Components of a moving fluid particle (유체 운동 성분)



4가지 유체 운동성분과
유체 물리량(속도, 압력 등)
사이의 관계를 구명하는 것

(운동) = (이동, 병진) + (선변형) + (회전) + (각변형)의 중첩 결과

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Ch.4 Fluid kinematics

✓ New terminologies to illustrate fluid motion (익혀야 할 새로운 용어들)

- Field representation(속도장 표현): 유체입자 유동변수를 공간 좌표계 (x, y, z) 로 표현한 것
- Velocity field(속도장): 유체입자 속도를 공간 좌표계 (x, y, z) 및 시간(t) 함수로 표현한 것
- Eulerian method(오일러리안 방법): 주어진 시간에서 유동장 전체 입자운동 기술 방법(순간사진)
- Lagrangian method(라그랑지안 방법): 시간에 따라 입자 추적 운동 기술 방법(시간기록, 노출사진)
- 1D, 2D, 3D flow(1,2,3 차원 유동): 유동 성분의 구성을 나타내는 것
- Steady and unsteady flow(정상 및 비정상 유동): 시간에 따른 유동의 변화
- Streamline(유선): 주어진 시간에서 유체입자 속도의 접선을 연결한 선
- Streakline(유맥선): 주어진 시간에서 유체입자 들의 위치를 연결한 선
- Pathline(유적선): 시간에 따라 유체의 궤적을 연결한 선
- Material derivative(물질 도함수): 입자 추적(시간 변화율) 도함수
- Acceleration field(가속도장): local acc. (국소가속도) + convective acc. (대류가속도)
- Local acceleration(국소가속도): 유체입자 운동을 시간(t)의 함수로 나타낸 가속도
- Convective acceleration(대류가속도): 유체입자 운동을 공간(x, y, z)의 함수로 나타낸 가속도
- System(시스템): Lagrangian method(라그랑지안 방법)으로 표현한 관심영역
- Control volume(CV, 검사체적): Eulerian method(오일러리안 방법)으로 표현한 관심 영역
- Reynolds transport theorem(RTT, 레이놀즈 수송정리): 시스템과 검사체적 사이의 변환 관계

유동변수:
밀도, 압력, 속도, 가속도

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1 The Velocity Field (속도장)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

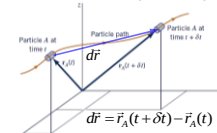
4.1 The Velocity Field (속도장)

✓ Field representation of the flow (유체 유동의 유동장 표현)

연속체 가설을 통해 유체는 (입자-입자) 및 (입자-주위)와 상호작용을 하는 유체입자로 구성
유체 유동변수(밀도, 압력, 속도, 가속도)는 공간 좌표계 (x, y, z)의 함수(유동장)로 표현
이와 동시에 유동변수는 시간에 따라 변화하므로 시간(t)의 함수로 표현

✓ Motion of the fluid particle (유체 입자 운동)

유체 입자의 위치(위치벡터), 운동(속도, 가속도)은 공간(x, y, z) 및 시간(t)의 함수로 표현 가능



- 독립변수: t (시간), x, y, z (공간)
- 종속변수: 유체의 모든 성질(밀도, 압력, 속도, 가속도 등)

$$\rho = \rho(t, x, y, z), \quad p = p(t, x, y, z)$$

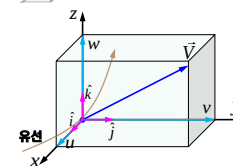
$$\vec{V} = \vec{V}(t, x, y, z), \quad \vec{a} = \vec{a}(t, x, y, z)$$

- 속도 및 가속도 벡터의 성분 표현

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \quad |\vec{V}| = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$$

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x(x, y, z, t)\hat{i} + a_y(x, y, z, t)\hat{j} + a_z(x, y, z, t)\hat{k}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1 The Velocity Field (속도장)

✓ Field representation of velocity vector(속도 벡터의 유동장 표현)

유체 유동 물리량(속도, 가속도, 압력, 온도, 밀도 등)은 **시간(t)**과 **공간(x, y, z)**의 함수

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t) = a_x(x, y, z, t)\hat{i} + a_y(x, y, z, t)\hat{j} + a_z(x, y, z, t)\hat{k}$$

여기서 좌표(x, y, z)는 유체 입자에 대한 것이 아니라 관찰하고자 하는 유동공간의 고정좌표 점을 의미 함.
속도, 가속도(벡터량) 및 압력, 밀도(스칼라량)은 각 공간 점에 분포함 → **장(field)의 개념**이 도입되어야 함

✓ Concept of Field (장(場)의 개념): 왜 장(Field)이 필요하지?

장(field, 場)의 정의: 공간 점과 한 물리량이 1대 1로 대응할 때 그 공간을 장(field)이라 함

3차원 공간의 어떤 영역 D의 각 점 (x, y, z)에 물리량 F가 대응되어 있을 때, **영역 D를 장**이라고 함.

- 스칼라장: 공간적으로 크기가 분포 (온도, 밀도, 압력 등이 분포)

- 벡터장: 공간적으로 크기와 방향이 분포 (속도, 가속도, 힘(중력) 등이 분포)

장(field)의 필요성: 공간상에 스칼라량 또는 벡터량을 나타내기 위해서는 **정의역(장)**이 필요

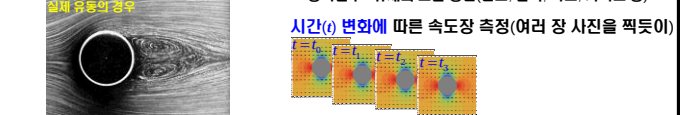
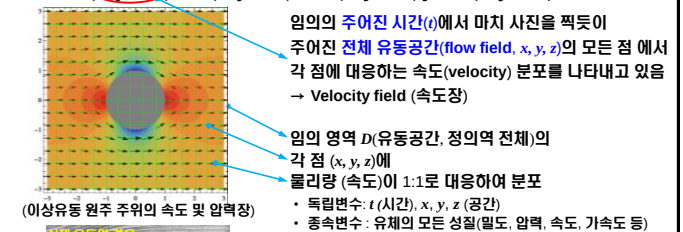
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1 The Velocity Field (속도장)

✓ Velocity field (속도장)

In fluid dynamics the **flow velocity**, or **velocity field**, of a fluid is a vector field which is used to mathematically describe the motion of a fluid.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1 The Velocity Field (속도장)

✓ Velocity field (속도장)을 표현하는 여러 가지 방법

4.1.1: Eulerian method 및 Lagrangian method: 유동장 표현 방법에 따른 분류

- Eulerian method(오일러리안 방법): 주어진 시간에서 유동장 전체 입자운동 기술(순간사진)
- Lagrangian method(라그랑지안 방법): 시간에 따라 입자추적 운동 기술 방법(노출사진)

4.1.2: 1D, 2D, 3D flow (1, 2, 3 차원 유동): 차원(공간)에 따른 분류

- 1-Dimensional flow: 속도 성분이 1차원(V=V(x))공간에서 변화하는 유동
- 2-Dimensional flow: 속도 성분이 2차원(V=V(x, y))공간에서 변화하는 유동
- 3-Dimensional flow: 속도 성분이 3차원(V=V(x, y, z))공간에서 변화하는 유동

4.1.3: Steady and Unsteady flow (정상 및 비정상 유동): 시간에 따른 분류

- Steady flow: 속도 (또는 물리량)이 시간에 따라 변화하지 않고 일정한 유동($\partial/\partial t = 0$)
- Unsteady flow: 속도 (또는 물리량)이 시간에 따라 변화하는 유동($\partial/\partial t \neq 0$)

4.1.4: Streamline, Streakline, Pathline, Timeline: 유동 경로 기술방법에 따른 분류

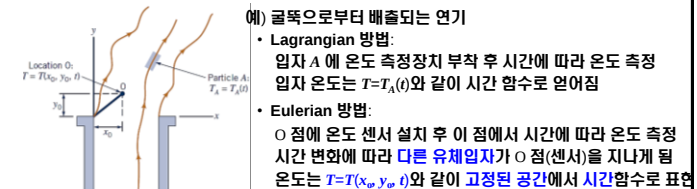
- Streamline(유선): 주어진 시간에서 유체입자 속도벡터의 접선을 연결한 선
- Streakline(유맥선): 주어진 시간에서 유체입자 들의 위치를 연결한 선
- Pathline(유적선): 시간에 따라 유체입자의 궤적을 연결한 선
- Timeline(시간선): 주어진 유동장의 속도 벡터 끝을 연결하여 가시적으로 나타낸 선

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.1 Eulerian & Lagrangian method

✓ Lagrangian & Eulerian description(라그랑지 및 오일러 기술방법)

- Lagrangian description(라그랑지 기술방법, 노출사진)
동일한 유체입자를 따라가면서(시간변화에 따라) 유체입자의 물리량 변화를 표현하는 방법
- Eulerian description(오일러 기술방법, 순간사진)
주어진 공간영역(속도장)에서 시간에 따라 유체입자의 물리량 변화를 표현하는 방법
즉, 주어진 공간(x, y, z)에서 시간(t)의 함수로 표현하는 방법



✓ 두 유체 유동 표현방법 중 어떤 것이 편리할까?

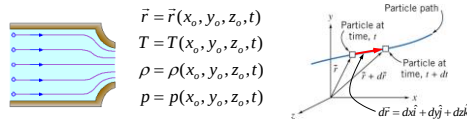
- 고체역학의 관점: Lagrangian 방법 (입자 추적 방법)
 - 유체역학의 관점: Eulerian 방법 (유동장 기술 방법)
- 왜 그럴까? (유체입자의 개수가 너무 많음)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.1 Lagrangian viewpoint of fluid flow

• Lagrangian description(라그랑지 기술방법)

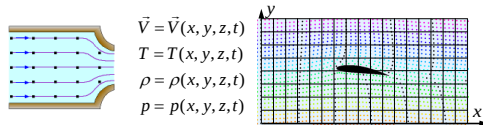
the fluid motion is described by following individual fluid particles and noting how all relevant fluid properties change as a function of time as seen by the fluid particle being "followed".



여기서 x_o, y_o, z_o 는 초기위치를 의미하며, 모든 값이 이 값을 기준으로 기술됨을 의미함
예: 위치변화: $dx = x - x_o$
속도변화: $dV = V - V_o$

• Eulerian description(오일러 기술방법)

the fluid motion is described by calculating all of the necessary properties (density, pressure, velocity, etc.) as functions of space ("fixed" positions in x, y, z space) and time. The flow itself is characterized by what happens at fixed points in space as fluid flows past these points.



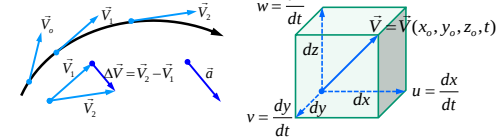
여기서 x, y, z 는 유동장 내에 고정된 모든 좌표를 의미함.
예: 속도=속도(x, y, z, t)
압력=압력(x, y, z, t)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.1 Lagrangian viewpoint of fluid flow

✓ Lagrangian viewpoint of the flow field

정의: 유체입자 운동을 동일한 유체입자를 따라가며 Newton 제2법칙을 이용하여 기술하는 방법



$t = t$ 일 때 유체입자의 위치: $\vec{r}_{p,t=t} = \vec{r}(x_p, y_p, z_p, t)$ (p = particle)

유체입자의 속도: $\vec{V}_{p,t=t} = \vec{V}(x_p, y_p, z_p, t)$

새로운 위치(속도)가 초기 값을 기준으로 기술

$t = t + dt$ 일 때 유체입자의 위치: $\vec{r}_{p,t=t+dt} = \vec{r}(x_p + dx, y_p + dy, z_p + dz, t + dt)$

유체입자의 속도: $\vec{V}_{p,t=t+dt} = \vec{V}(x_p + dx, y_p + dy, z_p + dz, t + dt)$

• 응용 분야 (Application of Lagrangian viewpoint of the flow field)

고체역학과 같은 질점의 움직임을 기술하는데 적합 (시간에 따른 기록)

예: 고속도로 순찰차의 위치, 당구공의 움직임, 포탄의 궤적, 야구공의 궤적, 인공위성 궤도 비행
(Note: 유체는 연속체 이므로 동일한 유체입자 추적 어렵고, 상호작용을 쉽게 기술할 수 없다.)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.1 Lagrangian viewpoint of fluid flow

✓ Summary of Lagrangian viewpoint of fluid flow

- 개개의 유체입자 각각에 대한 움직임을 기술 (경로에 대한 시간기록 → 유적선)
- 고체역학과 같은 질점의 동역학적 해석에 사용되는 방법
- 열역학의 밀폐계(closed system)와 같은 개념
- Newton's second law is directly applicable

⇒ Motion is describe using the differential equations(미분해석)

✓ Equations for differential analysis

*Lagrangian equation을 의미하는 것이 아님

*단순히 미분형 방정식을 보여주는 것임

$$\text{Continuity eq.: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\text{Momentum eq.: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{V} = \vec{f} - \nabla p$$

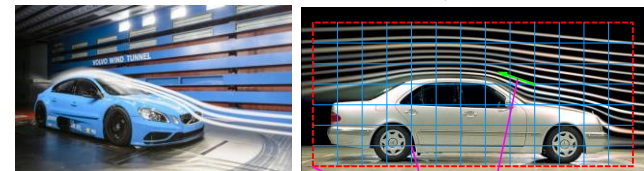
$$\text{Energy eq.: } \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{Constant}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.1 Eulerian viewpoint of fluid flow

✓ Eulerian viewpoint of the flow field

정의: 사진 촬영과 같이 특정한 시간에 유동영역(검사체적) 내 미리 설정한 고정된 공간(좌표)을 통과하는 서로 다른 유체 입자의 운동 및 물리량을 기술 (동일 유체입자를 추적하지 않음)



(Volvo wind tunnel test facility)

검사체적 좌표점(x, y, z) 물리량(속도, 압력, 밀도 등) (임의의 영역) $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$, $\vec{p} = \vec{p}(x, y, z, t)$...

• 응용분야 (Application of Eulerian viewpoint of the flow field)

주어진 공간 내에 채워진 유체입자의 물리량(속도, 밀도, 압력)을 특정한 시간(사진촬영 처럼)에서 모든 점에 대해 얻는 방법 (각 점의 유체입자 속도를 동시에 측정하여 속도장(Velocity field)를 얻음)

예: 풍동실험, 고속도로 불게이트, 고정된 웹캠(webcam)에서 얻은 영상 정보 등

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.1 Eulerian viewpoint of fluid flow

✓ Summary of Eulerian viewpoint of fluid flow

- 유체입자가 종만한(연속체) 공간(검사체적)의 특별한 점(고정된 좌표)에서 주어진 시간(사진촬영 처럼)에서 유체입자의 운동(or 압력, 온도, 밀도 등 물리량)을 기술
- 공간좌표에서 유체입자의 물리량을 동시에 측정: 예) 속도장(Velocity field)을 얻음 : 유체 입자의 운동 해석에 적합
- 열역학의 개방계(open system)와 같은 개념
- Integrating description** is needed instead of Newton's second

➡ Concept of control volume is introduced (**적분해석**)

✓ Equations for control volume analysis

$$\text{Continuity eq.: } \frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{Momentum eq.: } F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$\text{Energy eq.: } \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} e (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.2 1D, 2D, 3D flow (1, 2, 3 차원 유동)

✓ 유체 유동은 공간(x,y,z) 과 시간(t)의 함수(Flow as a function of space & time)

$$\vec{V} = \vec{V}(s, t) = \vec{V}(x, y, z, t) \\ = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$

✓ 유체 유동의 구분(Classification of Fluid flow): 시간(t), 공간(s), 차원, 형태

1) 시간(t)과 공간 위치(s(x, y, z))

- (1) 정상 균일 유동 (steady and uniform flow)
- (2) 비정상 균일 유동 (unsteady and uniform flow)
- (3) 정상 불균일 유동 (steady and non-uniform flow)
- (4) 비정상 불균일 유동 (unsteady and non-uniform flow)

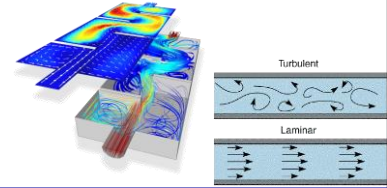
시간 함수: 정상, 비정상
공간 함수: 균일, 불균일

2) 차원(Dimension) (x, y, z)

- (1) 1차원 유동 (1-Dimensional flow)
- (2) 2차원 유동 (2-Dimensional flow)
- (3) 3차원 유동 (3-Dimensional flow)

3) 형태(structure)

- (1) 층류(Laminar flow)
- (2) 난류(Turbulent flow)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.2 1D, 2D, 3D flow (1, 2, 3 차원 유동)

✓ 일반적인 유체 유동은 시간(t)과 3차원 공간(x,y,z)의 함수(3-dimensional flow)

$$\vec{V} = \vec{V}(t, s) = \vec{V}(t, x, y, z) = u(t, x, y, z)\hat{i} + v(t, x, y, z)\hat{j} + w(t, x, y, z)\hat{k}$$

그러나 많은 경우 가정을 도입하여 정확도를 유지하면서 1차원 및 2차원 유동으로 단순화

(1) 1차원 유동(One-dimensional Flow):

유동을 한 방향에 대한 좌표와 시간 함수로 단순화. 단면에서 평균속도 적용할 경우

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0 \rightarrow \vec{V} = \vec{V}(t, s) = \vec{V}(t, x) = u(t, x)\hat{i}$$

(2) 2차원 유동(Two-dimensional Flow):

유동을 두 방향에 대한 좌표와 시간 함수로 단순화. 평판상의 유동, 경계층유동

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0 \rightarrow \vec{V} = \vec{V}(t, s) = \vec{V}(t, x, y) = u(t, x, y)\hat{i} + v(t, x, y)\hat{j}$$

(3) 3차원 유동(Three-dimensional Flow):

유동을 세 방향에 대한 좌표와 시간 함수로 단순화. 유한한 크기의 날개 끝 선회류(회전) 등

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \neq 0 \rightarrow \vec{V} = \vec{V}(t, x, y, z) = u(t, x, y, z)\hat{i} + v(t, x, y, z)\hat{j} + w(t, x, y, z)\hat{k}$$

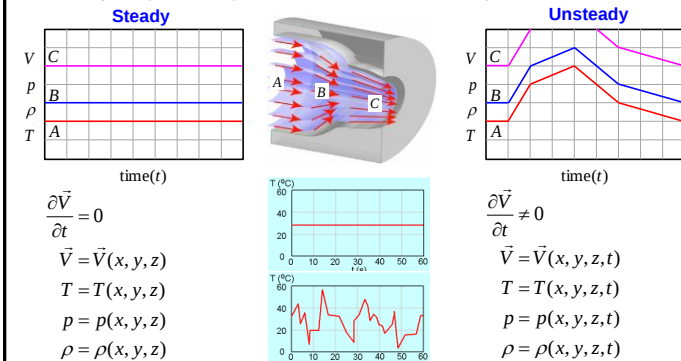
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.3 Steady and Unsteady flow

✓ Steady(정상, $\partial/\partial t = 0$) and Unsteady(비정상, $\partial/\partial t \neq 0$) flow : 시간에 따른 변화

Steady flow(정상유동): 공간상의 주어진 점에서 속도가 시간에 따라 변화하지 않는 유동

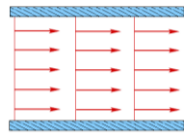
Unsteady flow(비정상 유동): 속도가 시간에 따라 변화하는 유동(주기, 비주기, 무질서 유동 등)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

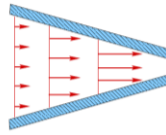
4.1.3 Steady and Unsteady flow

✓ Uniform and Non-uniform flows : 공간 위치에 따른 속도 변화

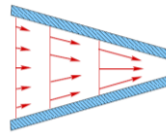


(a) Uniform flow

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$



(b) Non-uniform flow
(locally uniform flow)

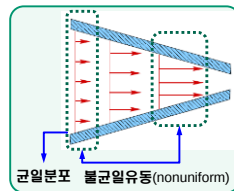


(c) Non-uniform flow

$$\frac{\partial u}{\partial s} \neq 0$$

✓ What is the difference?

- **균일유동 (uniform flow)**
: 공간에서 속도(방향과 크기)가 같은 크기
- **균일분포유동 (uniformly distributed flow)**
: 한 단면의 속도가 같은 크기



균일분포 균일유동(nonuniform)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.3 Steady and Unsteady flow

✓ 시간(t)과 공간 위치(s(x, y, z))에 따른 유동 구분

(1) **정상 균일 유동(Steady and Uniform Flow)**

유속이 시간의 경과에 관계없이 공간상에서 일정

ex) 단면적이 일정한 관내 유동

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = 0$$

(2) **비정상 균일 유동(Unsteady and Uniform Flow)**

유속이 시간에 따라 변화하지만 공간상에서는 일정

ex) 단면적이 일정한 직관 내에서 가감속이 발생할 때
관내의 모든 위치에서 동시에 속도변화가 발생

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = 0$$

(3) **정상 불균일 유동(Steady and Nonuniform Flow)**

유속은 시간에 관계없이 일정, 그러나 주어진 영역내의 모든 점에서

속도가 공간좌표에 관계없이 동일하지 않는 경우

ex) 단면적이 일정하지 않은 관내의 유체유동

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \neq 0$$

(4) **비정상 불균일 유동(Unsteady and Nonuniform Flow)**

유속이 시간에 따라 변화, 공간 위치에 따라 변화

ex) 단면적이 일정하지 않은 관내의 유동에서 가감속이 있을 때

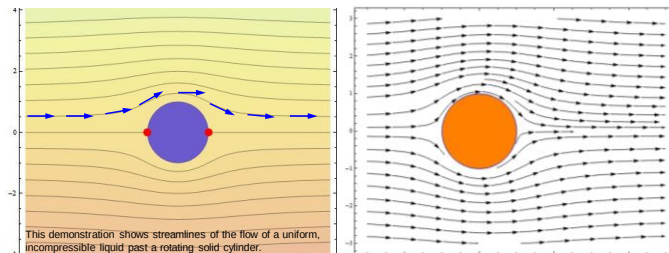
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \neq 0$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

1) **Streamlines (유선) (순간사진)**

Euler 방법으로 유동장을 표현한 것으로 **임의의 순간**에서 전체 유동장에서 한 유선상에 위치하는 모든 유체입자의 속도 벡터가 그 선에서 그은 접선방향과 일치하게끔 그려진 가상 곡선. 주로 해석적 도구로 사용되며 주어진 시간에 유동장 전체를 사진을 찍어 얻을 수 있음. 정상유동(steady flow)의 경우 유선은 변화하지 않지만, 비정상 유동의 경우 변화함.



This demonstration shows streamlines of the flow of a uniform, incompressible liquid past a rotating solid cylinder.

유선은 서로 교차할 수 없으므로 유선에 수직방향의 속도 성분은 존재하지 않는다.

즉, 유체는 유선 또는 유관을 가로질러 흐를 수 없다

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

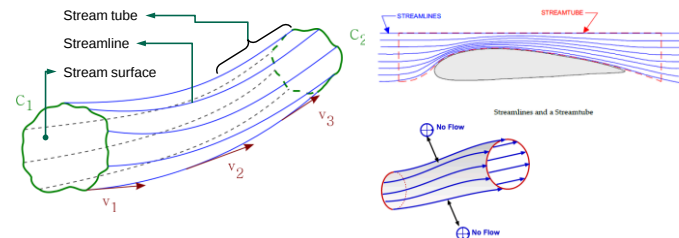
4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

✓ **Stream tube(유관)**

이웃하는 유선의 묶음. 유선의 집합을 경계로 하나의 작은 가상된 관

✓ **Stream filament(유사)**

유관의 단면적이 작아 내부 유선들의 속도차이를 무시할 수 있을 정도로 작은 경우



Solid blue lines and broken grey lines represent the streamlines. The red arrows show the direction and magnitude of the flow velocity. These arrows are tangential to the streamline. The group of streamlines enclose the green curves (C_1 and C_2) to form a stream surface.

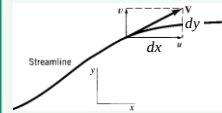
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

✓ Mathematical description of streamlines (유선의 수학적 표현)

Consider two dimensional incompressible flow

Streamline : lines tangent to the instantaneous velocity vector at every point



Velocity and velocity component along a streamline

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{streamline}} = \frac{v}{u} \rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$



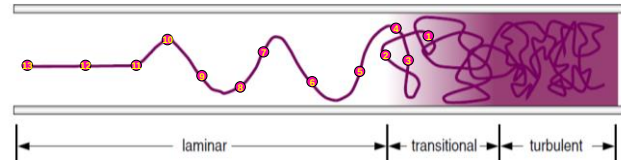
Continuity eq.: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (2-D flow)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

2) Streaklines (유맥선) (순간사진)

주어진 시각 이전에 공간상의 점들을 통과했던 유체 입자들이 배출되어 그려지는 선
유동장 내의 주어진 위치를 앞서 지나간 표시된 입자들은 **순간적으로 사진을 찍어 얻을 수 있을**
정상유동(steady flow)의 경우 유맥선(streakline)과 유선(streamline)은 정확히 일치 함
예) 한 점에서 염료를 유동장에 연속적으로 분출시킬 때 **한 줄기의 염료가 이루는 선**



Dye steadily injected into the fluid at a fixed point extends along a streakline. These can be thought of as a "recording" of the path a fluid element in the flow takes over a certain period. The direction the path takes will be determined by the streamlines of the fluid at each moment in time.

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

✓ Mathematical description of streaklines (유맥선의 수학적 표현)

Consider two dimensional incompressible flow

At first, we should calculate the pathline of a particle issuing from a source point

$$x_{\text{particle}}(t) = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y_{\text{particle}}(t) = y(t, x_0, y_0, z_0)$$

Then, we should calculate the streakline of lots of particles

$$x_{\text{streakline}}(t) = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y_{\text{streakline}}(t) = y(t, x_0, y_0, z_0)$$

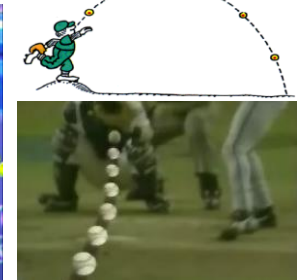
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

3) Pathlines (유적선) (노출사진, 시간기록)

Lagrange 개념의 선으로, 유체 입자가 한 점에서 다른 점으로 흐를 때 주어진 유체입자의 궤적선
유체입자의 움직임을 일정시간 노출을 통하여 사진을 찍어 얻을 수 있을
정상유동의 경우 유적선, 유맥선, 유선은 서로 정확히 일치한다.

예) 한강의 흐름을 기술하기 위해 작은 모형배를 띄워서 어떻게 흘러 가는지 관찰한다.
그리고 모형배가 통과한 경로(궤적)를 표시하면 유맥선을 그릴 수 있을



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

✓ Mathematical description of pathlines (유적선의 수학적 표현)

Consider two dimensional incompressible flow

Instantaneous position of a particle in space can be described as

$$x = x_p(t), y = y_p(t) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\text{particle}} = u(x, y, t), \left(\frac{dy}{dt} \right)_{\text{particle}} = v(x, y, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(x_o, y_o, z_o, t)$$

$$w = \frac{dz}{dt}, u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}$$

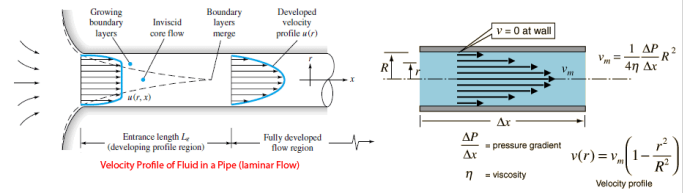
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

4) Timeline (시간선)

the lines formed by a set of fluid particles that were marked at a previous instant in time, creating a line or a curve that is displaced in time as the particles move.

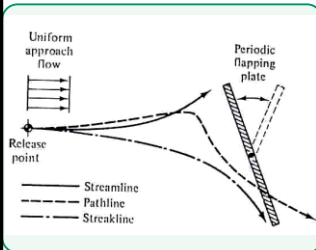
주어진 순간에 선을 형성하는 입자의 집합



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.1.4 Streamline, Streakline, Pathline

✓ Summary



✓ Streamline (유선)

임의의 순간에 공간상의 모든 점에서 유동방향의 접선을 연결한 선 (Euler 방법)

✓ Streakline (유맥선)

임의의 순간에 공간상의 무수히 많은 유체입자를 서로 연결한 선 (Euler 방법)

✓ Pathline (유적선)

시간 경과 동안 한 개의 입자가 지나는 경로 (Lagrange 방법)

✓ Timeline (시간선)

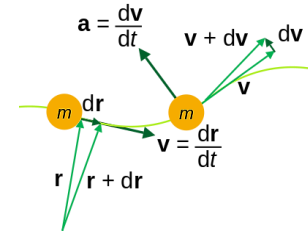
임의의 순간에 공간상의 유체입자를 연결한 선

Field lines differ only when the flow changes with time: when the flow is not steady. In steady flow (when the velocity vector-field does not change with time), the streamlines, pathlines, and streaklines coincide.

정상유동의 경우 (steady state flow) : streamline = streakline = pathline

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2 The Acceleration Field (가속도장)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2 The Acceleration Field (가속도장)

✓ 유체입자의 운동을 기술하는 두 가지 방법

- Lagrangian method : 각각의 유체 입자 운동을 **시간에 따라** 관찰 (동일한 입자를 관찰)
- Eulerian method: **주어진 시간에** 공간상의 고정된 점을 지나는 서로 다른 유체입자를 관찰

✓ 두 유체입자 운동 기술 방법에 대한 $F=ma$ 적용 (가속도의 적절한 표현 필요)

- Lagrangian method : 가속도를 **시간** 함수로 표현 $\vec{a} = \vec{a}(t)$
- Eulerian method: 가속도를 **시간과 공간**의 함수로 표현 $\vec{a} = \vec{a}(t, x, y, z)$

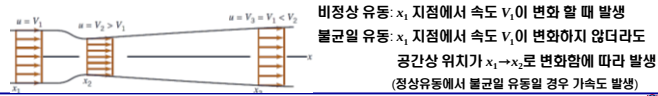
✓ 유체입자 가속도의 정의와 발생 요인

- 가속도의 정의: 유체입자 속도의 시간변화를 $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}(t, x, y, z)}{dt}$
- 유체입자 가속도 발생 요인:

Lagrangian method
Eulerian method

(두 방법을 어떻게 연결?)

- 1) 비정상유동(unsteady flow) : 공간상의 주어진 점에서 **속도가 시간에 따라 변화함**으로써 발생
- 2) 불균일(non-uniform flow) : 공간상의 한 점에서 다른 점으로 흐르면서 **속도가 변화하여 발생**



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

✓ 물질 도함수 (Material derivative)의 도입

- 도입 배경: 유체입자 가속도는 주어진 입자 속도의 시간변화로 Lagrangian method를 이용 표현하는 것이 기본. 그러나 유체입자 속도는 공간에 따라 변화하여 가속도를 발생 하므로 Eulerian method와 연관 짓는 것이 필요. (Lagrangian 방법 = Eulerian 방법)
- 물질 도함수 정의: 주어진 입자에 대한 어떤 물리량의 시간변화를 입자 도함수라고도 함

✓ 물질 도함수 (Material derivative)의 유도

• 위치벡터 직교좌표계(x, y, z) 표현: 끝점이 **pointer** 역할

$\vec{r}_A(t) = x_A(t)\hat{i} + y_A(t)\hat{j} + z_A(t)\hat{k}$

움직이는 유체입자 위치를 매개변수(t)를 이용한 표현

• $\vec{V}_A$ 로 표시되는 입자 A의 **속도**는 시간과 위치의 함수

$\vec{V}_A = \vec{V}_A(\vec{r}_A, t) = \vec{V}_A(x_A(t), y_A(t), z_A(t), t)$

- a_A 로 표시되는 **입자 A의 가속도**는 속도의 시간변화로 시간과 위치의 함수

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} [x_A(t), y_A(t), z_A(t), t]$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} [x_A(t), y_A(t), z_A(t), t] \text{ (입자 A의 속도가 시간과 공간의 다변수 함수임)}$$

시간과 공간의 다변수 함수에 대한 전미분(total derivative)을 구하면,

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{V}_A[x_A(t), y_A(t), z_A(t), t] \\ \frac{d\vec{V}_A}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial y_A} dy_A + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial z_A} dz_A \\ \frac{d\vec{V}_A}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial x_A} \frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial y_A} \frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial z_A} \frac{dz_A}{dt} \end{aligned}$$

$w = \frac{dz}{dt}$
 $v = \frac{dy}{dt}$
 $u = \frac{dx}{dt}$

유체입자 A의 속도성분에 대한 시간변화율이 각 성분에 대한 가속도라는 사실로부터

$$\begin{aligned} \vec{a}_A(t) &= \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial x_A} \frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial y_A} \frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial z_A} \frac{dz_A}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial x_A} + v_A \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial y_A} + w_A \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial z_A} \left(u_A = \frac{dx_A}{dt}, v_A = \frac{dy_A}{dt}, w_A = \frac{dz_A}{dt} \right) \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

유체입자 A에 대한 식은 유동장 내 모든 입자에게 적용할 수 있으므로 점자 A를 소거 (Lagrangian method를 Eulerian method와 연관 짓는 과정에서 **매우 중요**)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \left(u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt} \right)$$

x, y, z 성분 별로 정리하면 다음과 같음

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{가속도 } a \text{의 } x \text{ 방향 성분})$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{가속도 } a \text{의 } y \text{ 방향 성분})$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{가속도 } a \text{의 } z \text{ 방향 성분})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad \left(u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt} \right)$$

유체입자의 가속도를 간략히 표현하기 위해 새로운 연산자(물질도함수)를 도입하자

$$\begin{aligned} \frac{D(\quad)}{Dt} &= \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + u \frac{\partial(\quad)}{\partial x} + v \frac{\partial(\quad)}{\partial y} + w \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \quad (\text{물질도함수}) \\ \vec{V} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \\ \nabla(\quad) &= \frac{\partial(\quad)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\quad)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\quad)}{\partial z}\vec{k} \\ (\vec{V} \cdot \nabla)(\quad) &= u \frac{\partial(\quad)}{\partial x} + v \frac{\partial(\quad)}{\partial y} + w \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \end{aligned}$$

여기서 대문자 $D(\quad)/Dt$ 를 사용하여 표현하는 이유:

유동장에서 운동하는 물질입자(material particle)를 추적하는 물질도함수를 강조하기 위함

- 물질도함수(material derivative) 또는 물질미분
- 실질도함수(substantial derivative) 또는 실질미분
- 입자도함수(particle derivative) 또는 입자미분이라고도 부른다.

물질도함수의 물리적 의미:

입자를 추적(Lagrange)하면서 관찰한 시간미분의 Euler적 표현이라는 뜻이다.

이런 의미에서 Euler 미분이라고도 부른다.

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

유체입자 가속도의 물질도함수를 이용한 표현

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad \left(u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{V} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$\nabla \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

✓ 유동장 내 유체입자의 전체 가속도:

유체입자의 가속도는 유동장 내 주어진 지점의 국소가속도(한 점에서 속도의 시간변화율)와 입자의 공간 변화에 따른 대류가속도(속도의 위치에 따른 변화율)의 영향이 중첩되어 있음.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local change}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{Convective change}}$$

국소 가속도 (시간도함수) (비정상 효과)
대류 가속도 (공간도함수) (불균일 유동 효과)

미분 해석에서
Lagrangian description
Eulerian description으로
변환해주는 장치

✓ Lagrange(물질) 미분 - Euler 미분

✓ 여기서 구해진 가속도를 이용 힘을 해석: $\sum \vec{F}_p = m_p \vec{a}_p \rightarrow \sum \vec{F} = m \vec{a}$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{Total}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local change}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}}_{\text{Convective change}} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

✓ 실질(전) 가속도
(substantial acceleration)
입자를 따라 관찰한
시간 미분(물질 미분)
Lagrangian derivative

✓ 국소(순간) 가속도
(local acceleration)
고정점에서 시간에 따른
속도변화 측정(시간도함수)
비정상 유동 효과

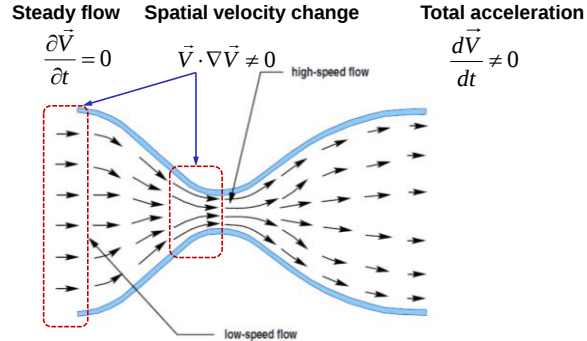
✓ 대류 가속도
(convective acceleration)
유동장 내 위치변화에 따른
속도변화 측정(공간도함수)
불균일 유동 분포 효과



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

✓ Steady accelerating flow in a nozzle (정상유동 노즐 내 유체 가속)

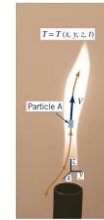


유량이 일정할 때 단면적 축소로 인해 속도가 증가: 대류가속도 존재
유량이 변화하여 속도가 변화: 순간가속도 존재

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.1 Material derivative (물질 도함수)

✓ 물질 도함수 (Material derivative)를 다른 유체 유동 변수에 적용



화염에서 주어진 유동과 관련된 온도장 $T = T(x, y, z, t)$ 에서
입자 A의 온도 (T_A)의 시간변화율은 다음과 같이 표현 할 수 있음

$$\begin{aligned} \frac{dT_A}{dt} &= \frac{\partial T_A}{\partial t} + \frac{\partial T_A}{\partial x} \frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial T_A}{\partial y} \frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial T_A}{\partial z} \frac{dz_A}{dt} \\ &= \frac{\partial T_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial T_A}{\partial x} + v_A \frac{\partial T_A}{\partial y} + w_A \frac{\partial T_A}{\partial z} \end{aligned}$$

입자 A의 온도 (T_A)에 시간변화율은 물질 도함수를 이용하여 표현할 수 있음

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$$

이와 유사하게 유동장에서 압력 p , 밀도 ρ , 에너지 e 의 시간변화율을 물질 도함수로 표현 가능

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)p = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)e = \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla e$$

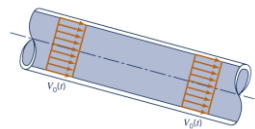
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.2 Unsteady effect (비정상 효과)

✓ 비정상 유동(unsteady flow)에서 국소가속도(local acc.) 발생

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local change 국소 가속도 (시간 도함수) (비정상 효과)}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{Convective change 대류 가속도 (공간 도함수) (불균일 유동 효과)}} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \end{aligned}$$

예) 비정상 균일유동(unsteady flow)의 경우: 단면적이 일정한 관로에서 가감속이 발생 할 경우



$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial V_0}{\partial t} \hat{i} \end{aligned}$$

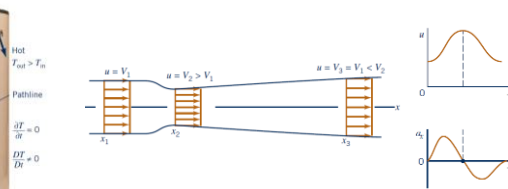
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.2.3 Convective effect (대류 효과)

✓ 불균일 유동(non-uniform flow)에서 대류가속도(convective acc.) 발생

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local change 국소 가속도 (시간 도함수) (비정상 효과)}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{Convective change 대류 가속도 (공간 도함수) (불균일 유동 효과)}} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \end{aligned}$$

예) 정상 불균일 유동(unsteady flow)의 경우: 단면적이 변화하는 관로에서 가감속이 없을 경우



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.3 Control Volume and System

(검사체적과 시스템)

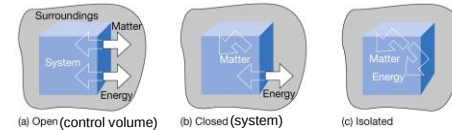
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.3 Control Volume and System

- ✓ 유체 운동은 방정식으로 근사화된 기본 물리법칙에 지배됨 (지배 방정식)
 - Continuity equation (연속방정식, 질량보존 법칙)
 - Newton의 운동법칙: **선형 및 각운동량 보존법칙**, Euler 운동방정식, Navier-Stokes 운동방정식
 - 에너지보존법칙: Bernoulli equation, 열역학 제 1법칙, 열역학 제 2법칙(엔트로피 증가법칙)
 - 보조 관계식: Newton's viscous law, 이상기체 상태방정식 등

✓ 지배 방정식을 유체에 적용하는 접근 방법

- 시스템 접근 방법 (System approach)
 - : 고정된 경계면 내의 물질의 집합체(일정한 양의 물질)로 정의 되는 시스템에 지배방정식 적용.
 - : 질량(mass): 시스템 경계 통과 할 수 없음 (시스템은 질량에 대해 **닫혀(closed)** 있음).
 - : 에너지(energy): 시스템 경계 통과 할 수 있음.
- 검사체적 접근 방법 (Control volume approach)
 - : 공간상에 일정한 체적(유체가 경계를 통해 흐를)으로 정의되는 검사체적에 지배방정식 적용.
 - : 질량(mass) 및 에너지가 경계를 통과할 수 있음(검사체적은 질량에 대해 **열려(opened)** 있음)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.3 Control Volume and System

✓ 유체 운동 해석에 필요한 접근 방법은?

- 시스템 접근 방법 (System approach) : **고체역학**에 더 적합
 - : 정역학 및 동역학에서 사용하는 자유물체도와 같이 물체(시스템)를 추적하는 방법
- 검사체적 접근 방법 (Control volume approach) : **유체역학**에 더 적합
 - : 유체입자를 추적하는 대신 유체가 물체 주위를 흐를 때 물체에 작용하는 힘을 구하는 것이 목적
 - 예) 로켓 엔진 노즐의 복잡한 유동 보다, 엔진노즐에서 발생하는 추력에 관심

✓ 검사체적(Control volume)의 종류

- 고정 검사체적 (fixed control volume)
- 이동 검사체적 (moving control volume): 일정속도(**관성**), 속도변화(**비관성**)
- 변형 검사체적 (deforming control volume)

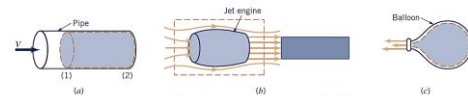


Figure 4.10 Typical control volumes: (a) fixed control volume, (b) fixed or moving control volume, (c) deforming control volume.

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.3 Control Volume and System

✓ 시스템(System)과 검사체적(Control volume)의 비교

Analysis	System	Control volume
View point	Lagrangian method	Eulerian method
Definition	Matter(경계 내 물질)	Space(기하학적 공간)
Application	Mechanics of rigid body	Fluid mechanics
Transfer	Mass (No), Energy (OK)	Mass (OK), Energy (OK)
Continuity eq.	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$
Momentum eq.	$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \vec{f} - \nabla p$	$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{v} dV + \int_{cs} \vec{v} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$
Energy eq.	$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{Constant}$	$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \int_{cs} e (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$

✓ 지금까지 공부한 유체 유동 관련 지배방정식

- 고체역학에 더 적합한 시스템 접근 방법 (System approach) 으로 기술된 방정식을 배움
- 따라서 검사체적 접근 방법으로 문제를 풀기 위해서는 지배방정식을 적절한 형태로 바꾸어야 함
- Reynolds transport Theorem(레이놀즈 수송정리)과 같은 **해석적 도구**가 필요

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

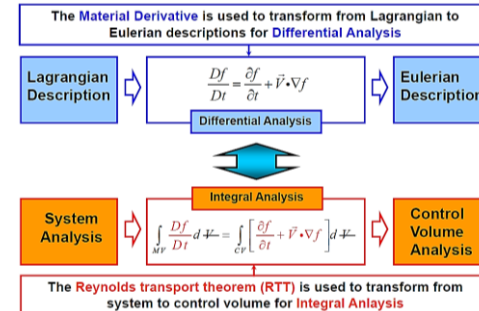
4.4 The Reynolds Transport Theorem (레이놀드 수송정리)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4 The Reynolds Transport Theorem

✓ Reynolds Transport Theorem (RTT) (레이놀드 수송정리)

- 시스템 개념(주어진 유체 질량)을 검사체적 개념(주어진 체적)으로 변환하는 해석적 도구
- Lagrangian description을 Eulerian description으로 변환해 주는 해석적 도구
- 미분해석에 필요한 도구 : **물질 도함수** (이미 공부 했음)
- 적분해석에 필요한 도구 : Reynolds Transport Theorem(RTT)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

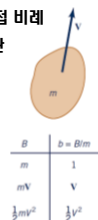
4.4 The Reynolds Transport Theorem

✓ 물리적 변수의 총량적(extensive) 성질과 강성적(intensive) 성질

- 유동 관련 물리적 변수: 속도, 가속도, 질량, 밀도, 온도, 운동량 등
- 이와 같은 물리적 변수는 단위 질량당 양으로 표현 가능

$$B = mb \rightarrow b = \frac{B}{m} \begin{cases} B: \text{총량적 성질 (extensive property), 질량에 직접 비례} \\ b: \text{강성적 성질 (intensive property), 질량에 무관} \end{cases}$$

물리량	B (총량적 성질)	b (강성적 성질)
질량	m	1
선형운동량	mV	V
각운동량	$r \times mV$	$r \times V$
운동에너지	$(1/2)mV^2$	$(1/2)V^2$
에너지	E	e



✓ 주어진 순간에 시스템이 보유하고 있는 총량적(extensive) 성질의 양 및 시간변화를

$$B_{sys} = bm = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \sum_i b_i (\rho_i \delta V) = \int_{sys} \rho b dV$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{sys} \rho b dV \right) \rightarrow \frac{dB_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \rho b dV \right) \quad \text{RTT: 시스템과 검사체적 사이의 총량적 성질의 시간변화를 관계로 의미}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

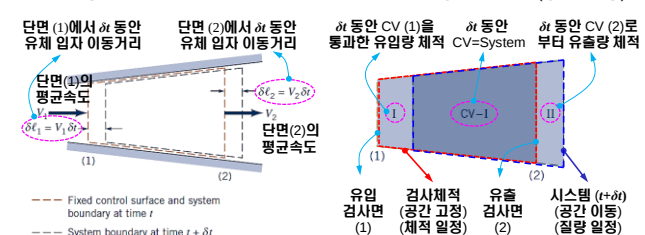
4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

✓ Reynolds Transport Theorem (RTT) 유도

- 적분해석에서 (시스템 개념)을 (검사체적 개념)으로 변환하는 과정: 미분해석의 물질도함수와 유사
- 1차원 유동에 대한 변환과정을 먼저 검토하고 3차원(일반적인 경우) 유동으로 확장 한다.

✓ 1차원 유동에 대한 Reynolds Transport Theorem (RTT)

- 1차원유동: 유입 및 유출 단면에서 속도는 단면과 수직, 물리량은 균일분포(평균값 적용)인 경우



시간 t 일 때 : 시스템과 검사체적이 서로 일치(SYS = Control volume)

시간 $t + \delta t$ 일 때: 검사체적은 공간상에 고정

시스템은 오른쪽으로 이동 (SYS = CV - I + II): 시스템을 검사체적으로 변환

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

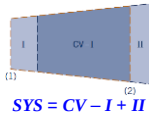
4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

B를 시스템 종량변수라고 하면 (시스템과 CV 내에 있는 종량성 물리량)

$$t = t: B_{sys}(t) = B_{CV}(t)$$

$$t = t + \delta t: B_{sys}(t + \delta t) = (CV - I) + II$$

$$= (B_{CV}(t + \delta t) - B_I(t + \delta t)) + B_{II}(t + \delta t)$$



$$SYS = CV - I + II$$

δt 시간 동안 시스템 내 B의 변화량(δB_{sys})으로 부터 변화를 ($\delta B_{sys}/\delta t$)을 계산하면.

$$\begin{aligned} \frac{\delta B_{sys}}{\delta t} &= \frac{B_{sys}(t + \delta t) - B_{sys}(t)}{\delta t} \\ &= \frac{B_{CV}(t + \delta t) - B_I(t + \delta t) + B_{II}(t + \delta t) - B_{sys}(t)}{\delta t} \\ &= \frac{B_{CV}(t + \delta t) - B_I(t + \delta t) + B_{II}(t + \delta t) - B_{CV}(t)}{\delta t} \\ &= \frac{B_{CV}(t + \delta t) - B_{CV}(t)}{\delta t} - \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

$$\frac{\delta B_{sys}}{\delta t} = \frac{B_{CV}(t + \delta t) - B_{CV}(t)}{\delta t} - \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t}$$

좌 우변 각 항에 $\delta t \rightarrow 0$ 의 극한을 취하면

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B_{sys}}{\delta t} = \frac{DB_{sys}}{Dt} \quad (물질도함수)$$

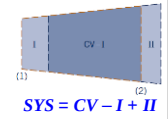
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{CV}(t + \delta t) - B_{CV}(t)}{\delta t} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} = \frac{\partial \left(\int_{CV} \rho b dV \right)}{\partial t}$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\rho_1 b_1)(\delta V_I)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\rho_1 b_1)(A_1 V_1 \delta t)}{\delta t} = \rho_1 A_1 V_1 b_1 = \dot{B}_{in}$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\rho_2 b_2)(\delta V_{II})}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\rho_2 b_2)(A_2 V_2 \delta t)}{\delta t} = \rho_2 A_2 V_2 b_2 = \dot{B}_{out}$$

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} - \dot{B}_{in} + \dot{B}_{out} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} - \rho_1 A_1 V_1 b_1 + \rho_2 A_2 V_2 b_2$$

1차원 유동에 대한
Reynolds 수송정리



$$SYS = CV - I + II$$

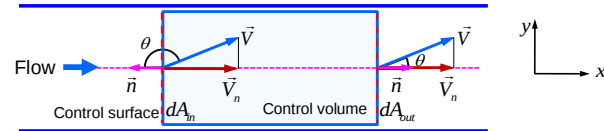


$\delta V_I = A_1 \delta l_1 = A_1 V_1 \delta t$
단위질량당 종량변수=b
단위체적당 종량변수= ρb
 $b = \frac{B}{m}$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

• 미소면적(dA)에 수직인 단위 벡터(Normal unit vector($\vec{n}$))의 방향 결정



$$dQ = \vec{V} \cdot d\vec{A} = \vec{V} \cdot \vec{n} dA = |\vec{V}| |\vec{n}| \cos \theta dA = |\vec{V}| \cos \theta dA$$

$$d\dot{m} = \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \rho |\vec{V}| |\vec{n}| \cos \theta dA = \rho |\vec{V}| \cos \theta dA$$

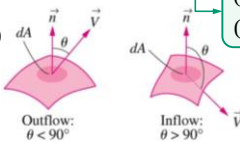
(+) : Outflow (유출)

(-) : Inflow (유입)

$\theta < 90^\circ$, $\cos \theta > 0$ (outflow)

$\theta > 90^\circ$, $\cos \theta < 0$ (inflow)

$\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$ (no flow)

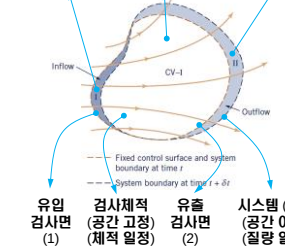


Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

✓ 3차원 유동(일반적인 유동)에 대한 Reynolds Transport Theorem (RTT)

δt 동안 CV(1)을 $t=t$ 에서 δt 동안 CV(2)로 통과한 유입량 제적 CV=System 부터 유출량 제적



$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} - \dot{B}_{in} + \dot{B}_{out}$$

1차원 유동에 대한
Reynolds 수송정리

• 1차원 유동 Reynolds 수송정리 제한 사항 소개

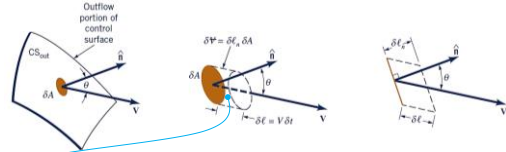
- 1) 유입 및 유출구가 1개씩 → 여러 입·출구
- 2) 각 단면에서 속도는 수직 → 경사각 θ
- 3) 각 단면에서 유량은 균일 → 불균일 분포

• 위 제약사항과 관련된 항은 $\dot{B}_{in}$, $\dot{B}_{out}$ 두 항임
• 따라서 위 두 항을 일반적인 경우로 확장하자

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

• $\dot{B}_{out}$: 검사체적으로부터 유체성질 B의 정미유출(net flow)을 의미 : CS_{out} 을 통한 유출



$$\delta V = \delta l_n \times \delta A = \delta l \cos \theta \times \delta A = V \delta t \cos \theta \times \delta A$$

$$\delta B = \delta b m = b \rho \delta V = b \rho (V \cos \theta \delta t) \delta A$$

$$\delta \dot{B}_{out} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{b \rho \delta V}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{b \rho (V \cos \theta \delta t) \delta A}{\delta t} = b \rho V \cos \theta \delta A$$

$$\dot{B}_{out} = \int_{CS_{out}} d\dot{B}_{out} = \int_{CS_{out}} b \rho V \cos \theta dA = \int_{CS_{out}} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$$= \int_{CS_{out}} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

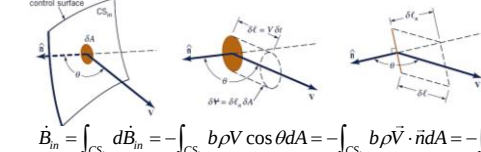
$$\vec{V} \cdot \vec{n} dA = \vec{V} \cdot d\vec{A} = V \cos \theta dA$$

$$B = mb \rightarrow b = \frac{B}{m}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.1 Reynolds 수송정리 유도

• $\dot{B}_{in}$: 검사체적으로부터 유체성질 B의 정미유입(net flow)을 의미 : CS_{in} 을 통한 유입



$$\dot{B}_{in} = \int_{CS_{in}} d\dot{B}_{in} = - \int_{CS_{in}} b \rho V \cos \theta dA = - \int_{CS_{in}} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = - \int_{CS_{in}} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

• $-\dot{B}_{in} + \dot{B}_{out}$ 계산: 검사면 전체를 통한 정미 유량(net flow)

$$\dot{B}_{out} = \int_{CS_{out}} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{CS_{out}} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{B}_{in} = - \int_{CS_{in}} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = - \int_{CS_{in}} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$-\dot{B}_{in} + \dot{B}_{out} = - \left(- \int_{CS_{in}} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \right) + \int_{CS_{out}} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

• 모든 계산 결과를 합하면 3차원 Reynolds 수송정리(RTT)가 얻어짐

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} - \dot{B}_{in} + \dot{B}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

3차원 유동에 대한 Reynolds 수송정리

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.2 Reynolds 수송정리의 물리적 해석

✓ Reynolds 수송정리(RTT)의 물리적 의미

System	Control Volume
Rate of change of B in System	Rate of change of B in CV + Outflow from CV - Inflow into CV

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} b \rho dV \right) + \underbrace{\int_{CS_{out}} b \rho |\vec{V}| \cos \theta dA}_{\text{Outflow from CV}} - \underbrace{\int_{CS_{in}} b \rho |\vec{V}| \cos \theta dA}_{\text{Inflow into CV}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} b \rho dV \right) + \underbrace{\int_{CS} b \rho |\vec{V}| \cos \theta dA}_{\text{Net flow over surface of CV}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} b \rho dV \right) + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$\vec{V}$: Velocity on CV
 $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ = Volume flux

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Flux: 단위면적 당 어떤 성질의 흐름의 비율
 (rate of flow of a property per unit area)
 Volumetric flux: 단위면적 당 유량의 흐름의 비율
 (rate of volume flow per unit area)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.2 Reynolds 수송정리의 물리적 해석

✓ Reynolds 수송정리(RTT)를 이용한 유체 유동 지배방정식 변환

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

3차원 유동에 대한 Reynolds 수송정리



1) Continuity equation : $B = m, b = m/m = 1$

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

2) Linear momentum equation : $B = P = mV, b = mV/m = V$

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \vec{F}$$

3) Angular momentum equation : $B = H = r \times mV, b = H = r \times mV/m = r \times V$

$$\frac{D\vec{H}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{r} \times \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

4) Energy equation : $B = E, b = E/m = e$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \frac{DQ}{Dt} - \frac{DW}{Dt}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.3 RTT와 물질 도함수와의 관계

✓ 물질도함수, 유동장 내 유체입자의 전체 가속도:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local change}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{Convective change}} \quad (\text{물질도함수의 벡터 표현})$$

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + u \frac{\partial(\quad)}{\partial x} + v \frac{\partial(\quad)}{\partial y} + w \frac{\partial(\quad)}{\partial z} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\quad)$$

(시간 도함수) (공간 도함수)
(비정상 효과) (불균일 유동 효과)

✓ Reynolds 수송정리

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CV} b \rho \nabla \cdot \vec{V} dV$$

$$= \int_{CV} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f \right] dV, \quad (f = b\rho)$$

(시간 도함수) (공간 도함수)
(비정상 효과) (불균일 유동 효과) RTT는 정상 및 비정상 효과를 모두 포함하고 있음

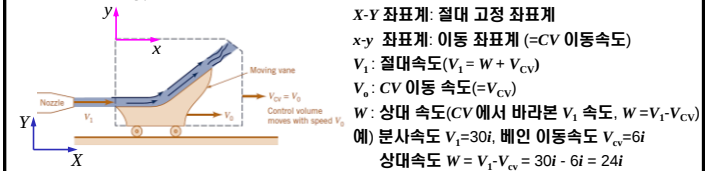
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.6 Moving CV(움직이는 검사체적)

✓ 움직이거나, 가속되거나, 변형되는 검사체적의 경우

- 일정속도로 움직이는 변형 없는 검사체적: 문제 해결이 용이 (이동 배인 문제)
- 가속되는 변형 없는 검사체적: 관성에 의한 겉보기 힘을 고려해야 함(가속되는 로켓 문제)
- 일정 또는 가속되는 변형 검사체적: 문제 풀이가 어려워 짐

✓ 일정속도(V_{CV})로 움직이는 변형 없는 검사체적(CV)



✓ 일정속도(V_{CV})로 움직이는 변형 없는 검사체적(CV)에 대한 RTT

- 절대속도 대신 상대속도를 이용하여 얻을 수 있음 (5장에서 상세히 다룸)

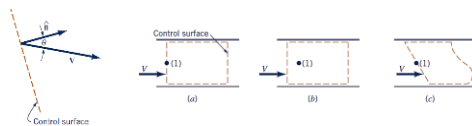
$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.7 검사체적의 선택

✓ 검사체적의 선택 기준

- 검사체적 선택은 문제 해결을 위해 중요함(동역학의 자유물체도 선택과 유사)
- 최적의 검사체적 선택 기준은 없으며 훨씬 더 좋은 검사체적만 존재(연습을 통해 발전)
- 몇 가지 기준: 측정 점은 검사면에 위치, 검사면은 속도에 수직하게 설정($\cos\theta=0$ or 90°)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Homework #5

✓ Problem set for Ch. 4

4, 14, 24, 32, 40,
46, 52, 54, 56, 72,
74
(11 problems)

제출기한: chapter 4. 시험 보기 직전

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University