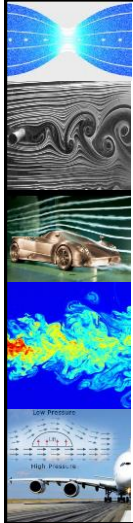


for 2nd grade undergraduate students

Ch.5 Finite CV Analysis



Professor Jeekeun Lee
Fluid Mechanics Laboratory
Division of Mechanical System Engineering
College of Engineering, JBNU, Republic of Korea

Ch. 5 Finite Control Volume Analysis

5.1 Conservation of Mass-Continuity Eq. (질량보존-연속방정식)

5.2 Newton's Second Law-

Linear Momentum (선형 운동량) and

Moment-of-Momentum Equations (각운동량 방정식)

5.3 First Law of Thermodynamics-The Energy Equation

(열역학 제1법칙, 에너지 방정식)

5.4 Second Law of Thermodynamics-Irreversible Flow

(열역학 제2법칙-비가역 유동)

5.5 Chapter Summary and Study Guide (요약 및 학습안내)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Learning Objectives in Ch.5



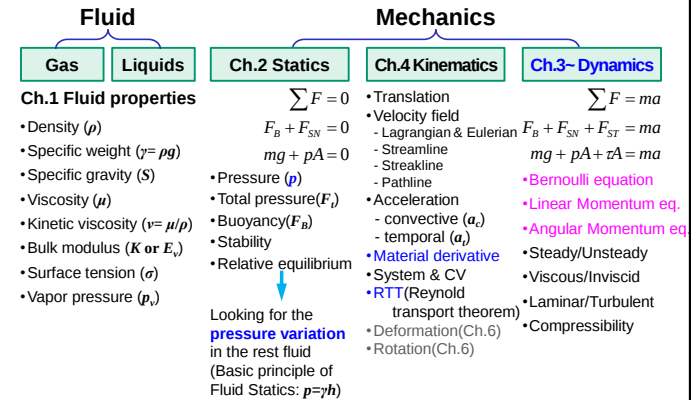
- ✓ select an **appropriate finite control volume** to solve a fluid mechanics problem
- ✓ apply conservation of **mass and energy and Newton's second law of motion to the contents of a finite control volume** to get important answers.
- ✓ know how **velocity changes and energy transfers** in fluid flows are related to **forces and torques**.
- ✓ understand why designing for **minimum loss of energy** in fluid flows is so important.



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Ch.5 Finite Control Volume Analysis

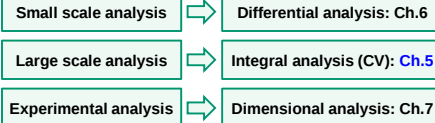
✓ Fluid Mechanics



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Ch.5 Finite Control Volume Analysis

✓유체 유동 문제 해결을 위한 접근 방법



Summary of terminologies

$V = A\Delta x = AV\Delta t$ (volume)
 $Q = AV = \text{volume flowrate}$
 $m = \rho A\Delta x = \rho AV\Delta t$ (mass)
 $\dot{m} = \rho AV = \text{massflowrate}$
 $\dot{G} = \gamma AV = \text{weightflowrate}$

✓유한 검사체적(공간상의 일정 영역) 해석 지배방정식(Governing equations)

- Continuity equation (연속방정식): 유동 해석 기본 방정식(질량보존법칙) $Q = A \times V$
- Newton's 2nd law (선형 운동량 보존법칙): **선형 운동량의 시간 변화율 = 힘(Force)**
- Newton's 2nd law (각 운동량 보존법칙): **각 운동량의 시간 변화율 = 토크(Torque)**
- Newton's 2nd law (Euler(비점성) 및 Navier-Stokes(점성) 운동방정식): 힘의 평형($F=ma$)
- 열역학 제 1법칙(에너지보존법칙: Bernoulli equation): 이상 유체의 에너지 평형
- 열역학 제 2법칙(엔트로피 증가법칙): 실제 유체의 에너지 손실(energy loss or head loss) 평가
- 보조 관계식: 점성법칙(Newton's viscous law), 이상기체 상태방정식(ideal gas equation) 등

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.1 Conservation of Mass (질량보존법칙, 연속방정식)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.1.1 연속방정식 유도

✓시스템(System)과 검사체적(Control volume)에 대한 Review

- System:** 고정된 경계면 내의 물질의 집합체(일정한 양의 물질)
: 질량은 시스템 경계 통과 불가. 에너지 통과 (시스템은 질량에 대해 **닫혀(closed)** 있음)
- Control volume:** 공간상에 일정한 체적(유체가 경계를 통해 흐름)
: 질량 및 에너지는 경계를 통과할 수 있음 (검사체적은 질량에 대해 **열려(opened)** 있음)

✓시스템에 대한 질량 보존법칙

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0, \quad \left(M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \right) \text{ (시스템 질량의 시간변화율 = 0)}$$

(질량은 생성되거나 소멸되지 않고 보존)

✓유한 검사체적에 대한 질량 보존법칙

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} b \rho dV + \int_{cs} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (\text{3차원 유동에 대한 Reynolds 수송정리})$$

Continuity equation : $B = m, b = m/m = 1$

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{검사체적에 대한 질량보존법칙 표현: 연속방정식})$$

공간적으로 일정한 시스템 질량의 시간변화율 $\equiv$ 공간적으로 일정한 CV에 포함된 질량의 시간변화율 $\oplus$ CV의 표면(검사면)을 통과한 정미 질량 유동률

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.1 Conservation of mass

Continuity equation의 피적분 함수 풀이

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \begin{cases} = 0 & \text{for steady (정상유동: 검사체적 내 질량 변화가 없음)} \\ \neq 0 & \text{for unsteady (비정상유동: 검사체적 내 질량 변화가 있음. 축적 또는 감소)} \end{cases}$$

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} \quad (\text{검사면을 통한 입출입})$$

$$= \begin{cases} \vec{V} \cdot d\vec{A}: \text{volume flowrate} \\ \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}: \text{massflowrate} \end{cases}$$

Summary of terminology

$V = A\Delta x = AV\Delta t$ (volume)
 $Q = AV = \text{volume flowrate}$
 $m = \rho A\Delta x = \rho AV\Delta t$ (mass)
 $\dot{m} = \rho AV = \text{massflowrate}$
 $\dot{G} = \gamma AV = \text{weightflowrate}$

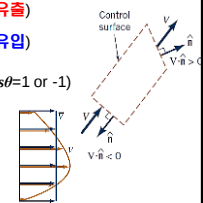
1차원 유동(균일유동 분포)에서 질량유량 벡터 내적 계산

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho |\vec{V}| |\vec{A}| \cos \theta \begin{cases} \theta < 90^\circ: \text{outflow } (\cos \theta: +) \text{ (유출)} \\ \theta > 90^\circ: \text{inflow } (\cos \theta: -) \text{ (유입)} \end{cases}$$

속도분포가 단면에 수직인 1차원 유동(균일유동 분포)의 경우($\cos \theta = 1$ or -1)

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho |\vec{V}| |\vec{A}| \cos \theta = \rho \vec{V} A = \rho Q = \dot{m} \text{ (kg/s)}$$

$$\vec{V} = \frac{\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}{\rho A} = \frac{\dot{m}}{\rho A} \quad (\text{단면 평균 속도})$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.1.2 고정되고 변형이 없는 검사체적

✓ 고정되고 변형이 없는 검사체적(Control volume) 요약: 예제 5.1~5.5

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

정미 (바를 正 맛味)
: net content
: 순수한 내용물만의 값

정상유동의 경우: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = 0$ for steady

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} = 0 \text{ (정미 질량유량, net mass flowrate)}$$

$$\int_{cs} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \sum Q_{out} - \sum Q_{in} = 0 \text{ (정미 체적유량, net volume flowrate)}$$

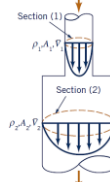
비정상유동 경우: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \neq 0$
 +: CV 내 질량 증가
 -: CV 내 질량 감소

1차원 유동에서 균일유동 분포의 경우 질량유량 벡터 내적 계산

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho |\vec{V}| |\vec{A}| \cos \theta \begin{cases} \theta < 90^\circ: \text{outflow (cos } \theta: +) \\ \theta > 90^\circ: \text{inflow (cos } \theta: -) \end{cases}$$

1차원 유동에서 불균일유동 분포의 경우: 단면 평균속도 사용

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \bar{V} A = \rho Q = \dot{m} (kg/s), \quad \bar{V} = \frac{\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}{\rho A} = \frac{\dot{m}}{\rho A} \text{ (단면 평균속도)}$$

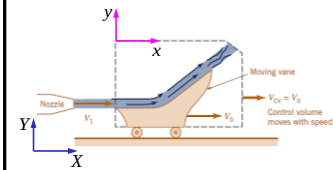


Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.1.3 움직이고 변형이 없는 검사체적

✓ 일정속도(V_{CV})로 움직이는 변형 없는 검사체적(CV)

• 절대속도 대신 상대속도를 RTT에 적용: 비행중인 가스터빈, 항해 중인 배 굴뚝 등



X-Y 좌표계: 절대 고정 좌표계

x-y 좌표계: 이동 좌표계 (=CV 이동속도)

V_1 : 절대속도 ($V_1 = W + V_{CV}$)

V_0 : CV 이동 속도 (= V_{CV})

W : 상대 속도 (CV에서 바라본 V_1 속도, $W = V_1 - V_{CV}$)

예) 분사속도 $V_1 = 30i$, 배인 이동속도 $V_{CV} = 6i$

상대속도 $W = V_1 - V_{CV} = 30i - 6i = 24i$

• 상대속도는 절대속도와 같은 수도 있고 다를 수도 있음: 다를 경우 벡터 연산 이용

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} b \rho dV + \int_{cs} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} b \rho dV + \int_{cs} b \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}$$

• 일정속도(V_{CV})로 움직이는 변형 없는 검사체적(CV)에 대한 질량보존법칙

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} b \rho dV + \int_{cs} b \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} = 0$$

Note: 변형 없는 검사체적(CV) 문제 중 속도가 변화하는 경우는 (가속도가 있는 경우)는 관성에 의한 결보기 힘을 고려해야 함. 다소 복잡



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.1.4 변형하는 검사체적

✓ 변형하는 검사체적(CV)

• 변형 검사체적: 검사체적의 크기가 시간에 따라 변화하는 것. 즉 검사면이 움직이는 경우에 해당

• 일정속도로 움직이는 변형 없는 검사체적에 대한 RTT를 그대로 적용 가능

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} b \rho dV + \int_{cs} b \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} = 0$$

CV가 변형하므로 CV가 변형, 즉 검사면이 움직이면서 변형 하므로 CV체적을 시간의 함수로 검사면에서 속도는 균일 또는 불균일 정확히 계산하는 것이 중요 CV의 속도와 값을 수도 같지 않을 수도 있음 (즉, 체적의 시간변화를) (속도분포를 적분해서 계산해야 한다는 의미)

• 예제 5.8 및 5.9를 통해 사용방법을 알아보자

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

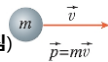
5.2 The Linear Momentum and Moment-of-Momentum Eq. (선형 및 각운동량)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2 선형 및 각운동량 방정식: 선형운동량

✓선형 운동량의 정의(Definition of linear momentum)

- 선형운동량(P) = 질량(m) × 속도(V) (벡터량: 방향과 크기를 가짐)



✓선형 운동량 변화량(Change of linear momentum): 충격량 역적(Impulse)

- 일정한 힘 F 가 t 시간 동안 작용하여 운동량이 mV_1 에서 mV_2 로 변화 할 경우

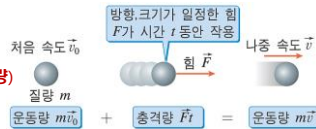
$$\vec{F} = \frac{d(m \times \vec{V})}{dt}$$

$$\vec{F} \times dt = d(m \times \vec{V}) = d\vec{P}$$

Impulse(역적) = Momentum change(운동량변화량)

$$\int_0^t \vec{F} \times dt = \int_{V_1}^{V_2} d(m \times \vec{V})$$

$$\vec{F} \cdot t = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad \text{운동량 기본 방정식}$$



✓선형 운동량 변화율(Rate of change of linear momentum) = 힘(Force)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m \times \vec{V})}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

운동량변화율 = 물체에 작용하는 힘 What can we do using the Force?

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2 선형 및 각운동량 방정식: 선형운동량

✓선형 운동량 보존 (Conservation of linear momentum)

- 외부의 힘을 받지 않는 계(system)에서 전체 선형 운동량의 합은 보존된다.
- 외력이 작용하지 않으면 물체의 충돌 및 폭발 전과 후의 운동량 합은 동일하다.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m \times \vec{V})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\text{if } \vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{Constant}$$

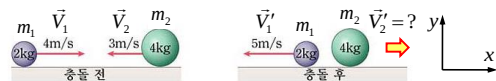
✓Examples of conservation of momentum



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2 선형 및 각운동량 방정식: 선형운동량

예) 아래 그림과 같이 질량이 각각 2 kg , 4 kg 인 두 물체가 각각 4 m/s , 3 m/s 로 운동하다가 충돌하였다. 충돌 후 V_1' 이 5 m/s 일 때, 충돌 후 V_2' 는?

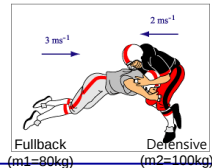


$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2'$$

$$2\text{kg} \times (+4\text{ m/s}) + 4\text{kg} \times (-3\text{ m/s}) = 2\text{kg} \times (-5\text{ m/s}) + 4\text{kg} \times \vec{V}_2'$$

$$\vec{V}_2' = +1.5\text{ m/s}$$

예) 아래 그림과 같이 질량이 각각 80 kg , 100 kg 인 미식축구의 fullback과 defensive가 각각 3 m/s , 2 m/s 로 운동하다가 충돌하였다. 충돌 후 두 사람의 공통속도와 방향은?



$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2'$$

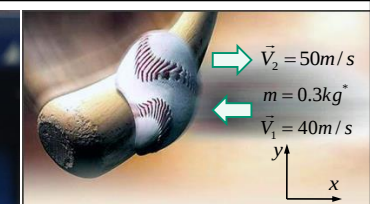
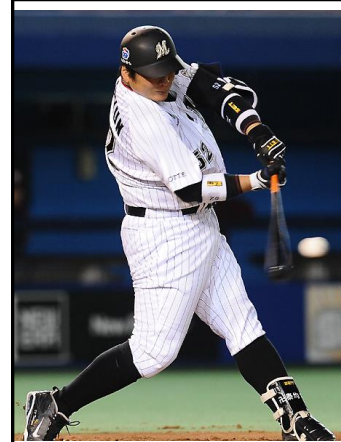
$$80\text{kg} \times (+3\text{ m/s}) + 100\text{kg} \times (-2\text{ m/s}) =$$

$$80\text{kg} \times (\vec{V}) + 100\text{kg} \times \vec{V}$$

$$\vec{V}_2 = +0.22\text{ m/s}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2 선형 및 각운동량 방정식: 선형운동량



i) 야구공의 운동량 변화량

$$\Delta(m\vec{V}) = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

$$= 0.3\text{kg} \times (50 - (-40))(\text{m/s}) = 27\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

ii) 충격시간 $t=0.1\text{s}$ 일 때 배트가 공에 준 힘은?

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}{t}$$

$$= \frac{27\text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.1\text{s}} = 270\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 270\text{N}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

4.4.2 Reynolds 수송정리의 물리적 해석

✓ Reynolds 수송정리(RTT)를 이용한 유체 유동 지배방정식 변환

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

3차원 유동에 대한
Reynolds 수송정리

Flash

알기

1) Continuity equation : $B = m, b = m/m = 1$

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

2) Linear momentum equation : $B = P = mV, b = mV/m = V$

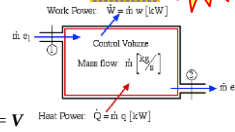
$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \vec{F}$$

3) Angular momentum equation : $B = H = r \times mV, b = H = r \times mV / m = r \times V$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{r} \times \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \vec{T}$$

4) Energy equation : $B = E, b = E/m = e$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \frac{DQ}{Dt} - \frac{DW}{Dt}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.1 선형운동량 방정식 유도

✓ 시스템(system)에 대한 선형운동량 방정식(Newton의 제2법칙)

• 관성 좌표계(가속도가 없는, 즉 일정 속도로 직선 운동하는 좌표계)에 대해 적용

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \vec{V} \rho dV = \sum \vec{F}_{sys} \quad dm = \rho dV \quad (\text{mass})$$

$$d\vec{P} = \vec{V} dm = \vec{V} \rho dV \quad (\text{momentum})$$

시스템의
선형운동량의
시간변화를

시스템에 작용하는
외력의 합

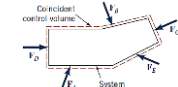
✓ 검사체적(Control volume)에 대한 선형운동량 방정식(Newton의 제2법칙)

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \vec{V} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_{SN} + \vec{F}_{ST}$$

시스템의
선형운동량의
시간변화를

CV 내부 물질에 대한
선형운동량의
시간변화를

CV의 표면(검사면)을
통한 선형운동량의
정미유동을



✓ 고정되고 변형없는 검사체적(Control volume)에 대한 선형운동량 방정식

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \sum \vec{F}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

✓ 선형운동량 방정식(Newton의 제2법칙)의 적용 대상

- 관성 좌표계: 일정속도(가속도=0)로 직선 운동하는 좌표계(Control volume) (Ch.5장)
- 비관성 좌표계: 속도가 변화하는(가속도≠0)로 직선 운동하는 좌표계(Control volume)
- 변형 없는 검사체적 또는 변형 검사체적의 경우 등

✓ Reynolds 수송정리 선형운동량방정식 적용 (각 항 계산과정 유의)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Flash

알기

1) 정상유동(steady flow)의 경우 : $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV = 0$

2) 1차원 균일 유동의 경우 : $\int$: mean value(평균값으로 변환)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_s = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= (+\vec{V}_1) \rho |\vec{V}_1| A_1 \cos 180^\circ + (+\vec{V}_2) \rho |\vec{V}_2| A_2 \cos 0^\circ$$

$$= -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

3) Control surface를 통과하는 운동량 플럭스(momentum flux) 결정

Note: flux
define as the rate of flow
of a property per unit area

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Step #1 : mass flux ($\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$)에서 dot product의 부호 결정

$$\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho |\vec{V}| |d\vec{A}| \cos \theta = \rho |\vec{V}| |d\vec{A}| \cos 0^\circ = +\rho |\vec{V}| |d\vec{A}| : \text{Outflow(유출)}$$

$$= \rho |\vec{V}| |d\vec{A}| \cos 180^\circ = -\rho |\vec{V}| |d\vec{A}| : \text{Inflow(유입)}$$



$\vec{V}$ = vector
 V = scalar

$$\cos 0^\circ = +1$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

Step #2 : momentum flux ($\vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$)에서 $\vec{V}$ 의 부호 결정

선택된 좌표계에 의해 결정됨

$$\vec{V}_1 = +|\vec{V}_1| \hat{i}, \quad \vec{V}_2 = +|\vec{V}_2| \hat{i}$$

$$\sum \vec{F} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= (+\vec{V}_1) \rho |\vec{V}_1| A_1 \cos 180^\circ + (+\vec{V}_2) \rho |\vec{V}_2| A_2 \cos 0^\circ$$

$$= -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

(고정 관성 좌표계)

Note: 계산 결과의 부호는
관성 좌표계에 대한 방향을 의미함

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

Ex 1) Control surface를 통과하는 운동량 플럭스 결정방법

$$\sum \vec{F} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{CS1} \rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{CS2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

$$= \rho |V_1 A_1| \cos 180^\circ + \rho |V_2 A_2| \cos 0^\circ$$

$$= -\rho |V_1 A_1| + \rho |V_2 A_2|$$

Case 1) (검사표면)

$$\int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{CS1} \vec{V}_1(\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) + \int_{CS2} \vec{V}_2(\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2)$$

$$= (+V_1)(-\rho |V_1 A_1|) + (+V_2)(+\rho |V_2 A_2|)$$

$$= -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

Case 2) (검사체적)

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{CS1} \rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{CS2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

$$= \rho |V_1 A_1| \cos 180^\circ + \rho |V_2 A_2| \cos 0^\circ$$

$$= -\rho |V_1 A_1| + \rho |V_2 A_2|$$

$$\int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{CS1} \vec{V}_1(\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) + \int_{CS2} \vec{V}_2(\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2)$$

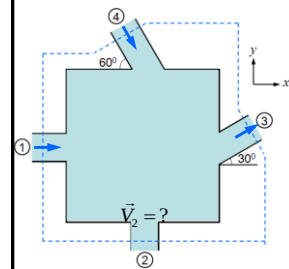
$$= (+V_1)(-\rho |V_1 A_1|) + (-V_2)(+\rho |V_2 A_2|)$$

$$= -\rho V_1^2 A_1 - \rho V_2^2 A_2 = \dot{m}(-V_2 - V_1)$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

Ex 2) Multiport(다중 입출구)를 통한 Mass flux and momentum flux 결정방법



Given: $A_1 = 0.02 \text{ m}^2$, $A_2 = 0.05 \text{ m}^2$, $A_3 = A_4 = 0.04 \text{ m}^2$

$$\vec{V}_1 = 3i \text{ m/s}$$

$$\dot{m}_3 = 56.7 \text{ kg/s (outflow)}$$

$$Q_4 = 0.03 \text{ m}^3/\text{s (inflow)}$$

$$\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$$

$$\vec{V}_2 = ?$$

Find: mass flux and momentum flux

Assumptions: 1) steady: $(\partial/\partial t = 0)$

2) Incompressible: $(\rho = c)$

3) Uniform properties at each section:

$\bar{\cdot}$: mean value (평균값으로 변환)

Basic equations:

i) continuity eq. : $0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

ii) momentum eq.: $\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

Solution)

1) mass flux calculation

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A1} \rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \int_{A3} \rho \vec{V}_3 \cdot d\vec{A}_3 + \int_{A4} \rho \vec{V}_4 \cdot d\vec{A}_4 = 0$$

$$= -\rho |V_1 A_1| + \int_{A2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \rho |V_3 A_3| - \rho |V_4 A_4|$$

$$= -\rho |V_1 A_1| + \int_{A2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \dot{m}_3 - \rho |Q_4|$$

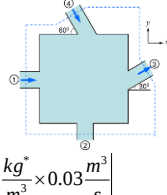
$$\int_{A2} \rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2 = \rho |V_1 A_1| - \dot{m}_3 + \rho |Q_4|$$

$$= \left| 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.02 \text{ m}^2 \times 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| - \left(56.7 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right) + \left| 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.03 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right|$$

$$\rho |V_2 A_2| = +33.3 \text{ kg/s (outflow)}$$

$$|V_2| = \frac{33.3 \text{ kg/s}}{\rho A_2} = \frac{33.3}{1000 \times 0.05} = 0.666 \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_2 = -0.666 j \text{ (m/s) (부호 변경에 주의)}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

2) momentum flux calculation

$$\sum \vec{F} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= \int_{A1} \vec{V}_1(\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) + \int_{A2} \vec{V}_2(\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2) + \int_{A3} \vec{V}_3(\rho \vec{V}_3 \cdot d\vec{A}_3) + \int_{A4} \vec{V}_4(\rho \vec{V}_4 \cdot d\vec{A}_4)$$

i) section A1 (inflow)

$$\int_{A1} \vec{V}_1(\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) = -\int_{A1} \vec{V}_1 |V_1 A_1| = -\vec{V}_1 |V_1 A_1|$$

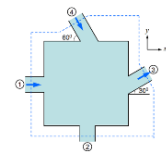
$$x\text{-direction: } \vec{V}_{1x} = +3i \text{ (m/s)}$$

$$\int_{A1} \vec{V}_1(\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) = -\vec{V}_{1x} |V_1 A_1| = -(+3) |1000 \times 3 \times 0.02| = -180 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = -180 \text{ N}$$

$$y\text{-direction: } \vec{V}_{1y} = 0 \text{ (m/s)}$$

$$\int_{A1} \vec{V}_1(\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}_1) = -\vec{V}_{1y} |V_1 A_1| = (0) |1000 \times 3 \times 0.02| = 0 \text{ N}$$

(부호 및 속도성분에 주의)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

ii) section A₂ (outflow)

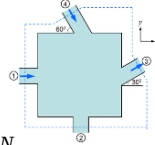
$$\int_{A_2} \vec{V}_2 (\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2) = + \int_{A_2} \vec{V}_2 |\rho V_2 dA_2| = + \vec{V}_2 |\rho V_2 A_2|$$

x-direction: $\vec{V}_{2x} = 0 \text{ (m/s)}$

$$\int_{A_2} \vec{V}_2 (\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2) = + \vec{V}_{2x} |\rho V_2 A_2| = (0) |1000 \times 0.666 \times 0.05| = 0 \text{ N}$$

y-direction: $\vec{V}_{2y} = -0.666 \text{ j (m/s)}$

$$\int_{A_2} \vec{V}_2 (\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}_2) = + \vec{V}_{2y} |\rho V_2 A_2| = + (-0.666) |1000 \times 0.666 \times 0.05| = -22.18 \text{ N}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

iii) section A₃ (outflow)

$$\int_{A_3} \vec{V}_3 (\rho \vec{V}_3 \cdot d\vec{A}_3) = + \int_{A_3} \vec{V}_3 |\rho V_3 \cdot dA_3| = + \vec{V}_3 |\rho V_3 A_3|$$

x-direction: $\vec{V}_{3x} = \vec{V}_3 \cos 30^\circ = 1.418 \cos 30^\circ = +1.228 \text{ i (m/s)}$

$$\int_{A_3} \vec{V}_3 (\rho \vec{V}_3 \cdot d\vec{A}_3) = + \vec{V}_{3x} |\rho V_3 A_3| = + \vec{V}_3 \cos 30^\circ |\rho V_3 A_3| \\ = (+1.228) |1000 \times 1.418 \times 0.04| = 69.65 \text{ N}$$

y-direction: $\vec{V}_{3y} = \vec{V}_3 \sin 30^\circ = 1.418 \sin 30^\circ = +0.709 \text{ j (m/s)}$

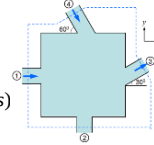
$$\int_{A_3} \vec{V}_3 (\rho \vec{V}_3 \cdot d\vec{A}_3) = + \vec{V}_{3y} |\rho V_3 A_3| = + \vec{V}_3 \sin 30^\circ |\rho V_3 A_3| \\ = (+0.709) |1000 \times 1.418 \times 0.04| = 40.21 \text{ N}$$

운동량 변화율 = 힘

권투의 4대 타격 기술은 jab, straight, hook, uppercut이다.

권투선수 주먹(질량(m): 변하지 않음)의 운동량(mv)을 이용 다른 각도(θ)로 타격하는 기술이다.

$$|\rho V_3 A_3| \quad + \vec{V}_{3y} |\rho V_3 A_3| \quad \vec{V}_{3x} = + \vec{V}_3 \cos 30^\circ$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

iv) section A₄ (inflow)

$$\int_{A_4} \vec{V}_4 (\rho \vec{V}_4 \cdot d\vec{A}_4) = - \int_{A_4} \vec{V}_4 |\rho V_4 dA_4| = - \vec{V}_4 |\rho V_4 A_4|$$

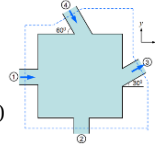
x-direction: $\vec{V}_{4x} = \vec{V}_4 \cos 60^\circ = 0.75 \cos 60^\circ = +0.375 \text{ i (m/s)}$

$$\int_{A_4} \vec{V}_4 (\rho \vec{V}_4 \cdot d\vec{A}_4) = - \vec{V}_{4x} |\rho V_4 A_4| = - \vec{V}_4 \cos 60^\circ |\rho V_4 A_4| \\ = -(0.375) |1000 \times 0.75 \times 0.04| = -11.25 \text{ N}$$

y-direction: $\vec{V}_{4y} = \vec{V}_4 \sin 60^\circ = 0.75 \sin 60^\circ = 0.65(-j) \text{ (m/s)}$

$$\int_{A_4} \vec{V}_4 (\rho \vec{V}_4 \cdot d\vec{A}_4) = - \vec{V}_{4y} |\rho V_4 A_4| = - \vec{V}_4 \sin 60^\circ |\rho V_4 A_4| \\ = -(-0.65) |1000 \times 0.75 \times 0.04| = +19.5 \text{ N}$$

(방향표시에 주의: 고정 관성 좌표계를 기준으로 표시)

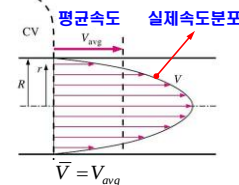


Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

✓ 운동량 수정계수(Momentum correction factor): 평균속도 적용 시 고려사항

• 1차원 균일유동 가정과 실제유동상의 차이 보정 (평균속도 사용에 따른 오차 보정)



$$Q = \int_{CS} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \vec{V} \cdot \vec{A} = \vec{V} A$$

$$\dot{m} = \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = \rho \vec{V} A$$

$$\sum \vec{F} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \vec{V} |\rho V A| = \rho \vec{V} A$$

3-D flow
속도의 제곱 항이 포함되어 있음
(높은 속도에 가중치가 주어짐)

$$\sum \vec{F} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \approx \beta \rho \vec{V}^2 A$$

$$\beta = \frac{1}{\rho \vec{V}^2 A} \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \frac{1}{\rho \vec{V}^2 A} \int_{CS} \rho \vec{V}^2 dA$$

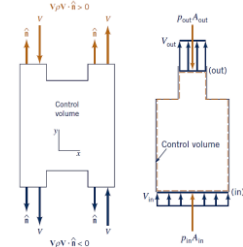
$$= \frac{1}{A} \int_{CS} \left(\frac{V}{\vec{V}} \right)^2 dA = \frac{4}{3} = 1.333 \text{ (laminar flow)}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

✓ Generalities for solving problems (문제풀이 일반원칙)

- 정상유동의 경우 변형되지 않는 검사체적 내부 물질의 선형운동량의 시간변화율은 0이다.
- 검사면에서 1차원 균일유동분포 문제의 적분과정이 간단해져 가 다루기 쉽다.
- 선형운동량은 벡터량 이므로 방향을 갖는다. (질량: 면적벡터 기준, 운동량: 설정 좌표계 기준)
- 검사체적을 속도벡터에 수직하게 설정하면 작용하는 F_{sx} (수직 표면력)은 압력에 의한 힘이다.
- 선형운동량 방정식에는 오직 검사체적에 가하는 외력만 고려된다.
- 어떤 물체를 고정하는데 필요한 힘은 검사표면에 작용하는 압력, 전단력, 선형운동량변화, 물체의 무게, 검사체적 내 유체의 무게 등에 의해 결정된다.



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

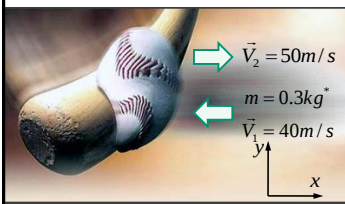
5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

✓ Summary for momentum formula

RTT	$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
Mass	$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ $\dot{m} = \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho AV$ (massflow rate) Mass: $B = m, b = m/m = 1$ $Q = \int_{CS} \vec{V} \cdot d\vec{A} = AV$ (volumeflow rate) Momentum: $B = P = mV, b = mV/m = V$
Mom.	$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$ $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m \times \vec{V})}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}$ 운동량 변화율 물체에 작용하는 힘 Impulse (충격량) 운동량 변화량

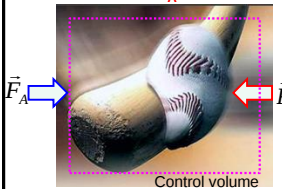
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Definition of two forces (F_A and R)



- 아구공의 운동량 변화량
 $\Delta(m\vec{V}) = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$
 $= 0.3kg^*(50 - (-40))(m/s) = 27kg^*m/s$
- 충격시간 $t = 0.1s$ 일 때 배트가 공에 준 힘은?
 $\vec{F}_{Bat} = \frac{m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}{t} = \frac{27kg^*m/s}{0.1s} = 270N(+x)$
- 충격시간 $t = 0.1s$ 일 때 공이 배트에 준 힘은?
 $\vec{F}_{Ball} = -\vec{F}_{Bat} = -270N(-x)$ (크기동일, 방향반대)

✓ Definition of F_A and R

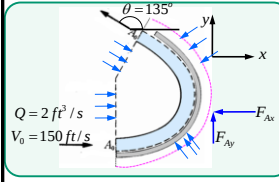


R	F_A
공이 배트에 가한 힘	배트가 공에 준 힘
유체가 평면에 가한 힘	평면이 유체에 가한 힘
유체가 배인에 가한 힘	배인이 유체에 가한 힘
유체가 CV에 가한 힘	CV이 유체에 가한 힘
유체가 CV에 남기 힘 (운동량 변화율)	CV을 고정하는데 필요한 힘 ($\sum F = ma$)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 고정 배인

예제 6-3)



- ✓ Given: $Q = 2 ft^3/s$ ✓ Assumptions
- 1) No friction
 - 2) No potential head ($F_B = 0$)
 - 3) Steady flow
 - 4) Uniform at each section
 - 5) No pressure effect
- ✓ Find: $R = ?$

✓ Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

CV에 작용하는 힘, CS에 작용하는 힘, CV의 운동량 변화율, CS를 통과한 net momentum 변화율

✓ Solution

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x &= \vec{F}_{sx} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \\ &= -F_{Ax} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (\text{압력에 의한 힘은 서로 상쇄}) \\ -F_{Ax} &= \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \vec{V}_{0x} |\rho V_0 A| \cos 180^\circ + \vec{V}_{1x} |\rho V_1 A| \cos 0^\circ \\ &= -(+V_0) |\rho V_0 A| + (+V_1 \cos 135^\circ) |\rho V_1 A| \\ &= -\rho V_0^2 A + \rho V_0^2 A \cos 135^\circ = \rho Q V_0 (\cos 135^\circ - 1) \end{aligned}$$

$-V_0 \cos 45^\circ$ 와 동일한 의미 (이렇게 하면 혼동됨)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 고정 베인

$$-F_{Ax} = -\rho V_0^2 A + \rho V_0^2 A \cos 135^\circ = \rho Q_0 V_0 (\cos 135^\circ - 1)$$

$$= 1.935 \text{ slug} / \text{ft}^3 \times 2 \text{ ft}^3 / \text{s} \times 150 \text{ ft} / \text{s} (\cos 135^\circ - 1)$$

$$= -990.98 (\text{slug} \cdot \text{ft} / \text{s}^2) = -990.98 \text{ lb}_f$$

$$F_{Ax} = 990.98 \text{ lb}_f \quad (\text{xy 좌표: } (-) \text{ 방향})$$

$$R_x = -F_{Ax} = -990.98 \text{ lb}_f \quad (\text{xy 좌표: } (+) \text{ 방향})$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{sy} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

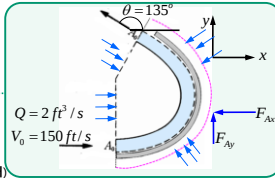
$$= +F_{Ay} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (\text{압력에 의한 힘은 서로 상쇄})$$

$$+F_{Ay} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \vec{V}_{0,y} | \rho V_0 A | \cos 0^\circ = + (V_0 \sin 135^\circ) | \rho V_0 A | = + \rho V_0^2 A \sin 135^\circ$$

$$= \rho Q_0 V_0 \sin 135^\circ = 1.935 \text{ slug} / \text{ft}^3 \times 2 \text{ ft}^3 / \text{s} \times 150 \text{ ft} / \text{s} \sin 135^\circ$$

$$= 410 \text{ slug} \cdot \text{ft} / \text{s}^2 = 410 \text{ lb}_f \quad (\text{xy 좌표: } (+) \text{ 방향})$$

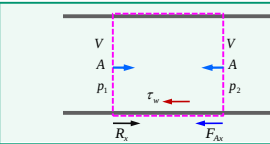
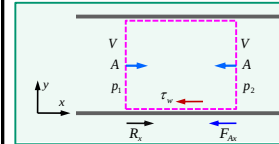
$$R_y = -F_{Ay} = -410 \text{ lb}_f \quad (\text{xy 좌표: } (-) \text{ 방향})$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

✓ 직관 내 유동 문제를 먼저 생각해 보자



➢ CV 1 (관 내벽을 경계로 설정)
관 내벽을 경계로 유체 부분만 CV로 설정
반력 R은 관 내벽에서 유체에 작용
즉, 절대압을 기준으로 한 상태가 된다.

➢ CV 2 (관 외벽을 경계로 설정)
관을 포함한 경계로 유체와 관을 포함 CV를 설정
반력 R은 관 외벽에 작용. 관을 고정하는데 이용된다.
즉, 대기압을 기준으로 한 게이지압 상태가 된다.

➢ Basic equation

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= \vec{F}_s = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (\text{운동량 변화 없음})$$

$$= p_1 A - p_2 A - F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = (p_1 - p_2) A$$

p: 절대압력(absolute pressure)

F_{Ax}: 관 내벽이 CV에 가하는 힘(공학적 의미 없음)

➢ Basic equation

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= \vec{F}_s = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (\text{운동량 변화 없음})$$

$$= p_1 A - p_2 A - F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = (p_1 - p_2) A$$

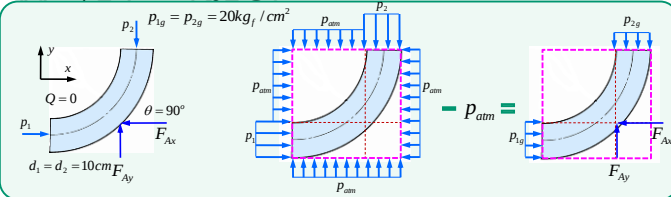
p: 게이지 압력(gage pressure)

F_{Ax}: 관을 고정하는데 필요한 힘(공학적 의미 있음)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

예제 6-8) 물이 흐르지 않는 경우



✓ Assumptions

- 1) No friction
- 2) No potential head ($F_b=0$)
- 3) Steady flow
- 4) Uniform at each section

✓ Find : F_A (곡관 고정에 필요한 힘)

✓ Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

CV에 작용하는 힘 CS에 작용하는 힘 CV의 운동량 변화를 CS를 통과한 net momentum 변화를

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_s = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (\because V_1 = V_2)$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

✓ Solution

i) x-dir.

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{sx} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= p_1 A_1 - p_2 A_1 - F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = p_1 A_1 - p_2 A_1 = p_{1g} A_1 = 20 \text{ kg}_f / \text{cm}^2 \times \frac{\pi}{4} (10 \text{ cm})^2$$

$$= 1570 \text{ kg}_f \quad (\text{xy: } (-) \text{ dir.})$$

ii) y-dir.

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{sy} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= -p_2 A_2 + p_1 A_2 - W_{\text{elbow}} - W_{\text{fluid}} + F_{Ay} = 0$$

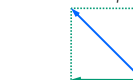
$$F_{Ay} = p_2 A_2 - p_1 A_2 = p_{2g} A_2 = 20 \text{ kg}_f / \text{cm}^2 \times \frac{\pi}{4} (10 \text{ cm})^2$$

$$= 1570 \text{ kg}_f \quad (\text{xy: } (+) \text{ dir.})$$

iii) Resultant force (R)

$$F = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

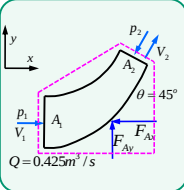
$$= 2220.3 \text{ kg}_f$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

예제 6-9)



(관 내 유체가 흐르고 단면적이 변할 경우)

✓ Given: $d_1 = 600\text{mm}$,

$d_2 = 300\text{mm}$

$p_{1\text{gage}} = 140\text{kPa}$

$p_{2\text{gage}} = ?$

$\theta = 45^\circ$

$Q = 0.425\text{m}^3/\text{s}$

✓ Assumptions

- 1) No friction
- 2) No potential head ($F_B=0$)
- 3) Steady flow
- 4) Uniform at each section

✓ Find: R (유체가 곡관에 가한 힘)

✓ Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$\underbrace{\quad}_{\text{CV에 작용하는 힘}} + \underbrace{\quad}_{\text{CS에 작용하는 힘}} = \underbrace{\quad}_{\text{CV의 운동량 변화율}} + \underbrace{\quad}_{\text{CS를 통과한 net momentum 변화율}}$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_S = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

속도 계산

$$V_1 = \frac{0.425\text{m}^3/\text{s}}{\pi/4(0.6\text{m})^2} = 1.503\text{m/s}$$

$$V_2 = \frac{0.425\text{m}^3/\text{s}}{\pi/4(0.3\text{m})^2} = 6.01\text{m/s}$$

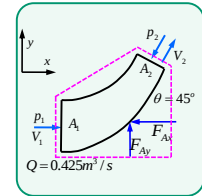
P_2 계산 (gage pressure)

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = C \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$p_2 = \gamma \left(\left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \right) + \frac{p_1}{\gamma} \right) = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) + p_1$$

$$= \frac{1}{2} 1000(\text{kg}/\text{m}^3) (1.503^2 - 6.01^2) (\text{m/s})^2 + 1.4 \times 10^5 \text{Pa}$$

$$= 1.213 \times 10^5 \text{Pa}$$



$d_1 = 600\text{mm}$,
 $d_2 = 300\text{mm}$
 $Q = 0.425\text{m}^3/\text{s}$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

✓ Solution

i) x-dir.

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{sx} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos 45^\circ - F_{Ax} = \vec{V}_{1x} |\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + \vec{V}_{2x} |\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ$$

$$= -(V_1) |\rho V_1 A_1| + (V_2 \cos 45^\circ) |\rho V_2 A_2| = -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 \cos 45^\circ$$

$$= \rho Q (V_2 \cos 45^\circ - V_1)$$

$$F_{Ax} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos 45^\circ - \rho Q (V_2 \cos 45^\circ - V_1)$$

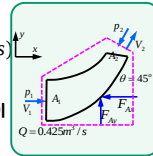
$$= 1.4 \times 10^5 \text{Pa} \times \frac{\pi}{4} \times (0.6\text{m})^2 - 1.213 \times 10^5 \text{Pa} \times \frac{\pi}{4} \times (0.3\text{m})^2$$

$$- 1000 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \times 0.425 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \times (6.01 \cos 45^\circ - 1.503) (\text{m/s})$$

$$= +32,260 \text{N} \quad (xy: (-) \text{ dir.})$$

$$R_x = -F_{Ax} = -32,260 \text{N} \quad (xy: (+) \text{ dir.})$$

F_{Ax} 의 초기 방향설정이
잘 되었음을 의미함



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

ii) y-dir.

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{sy} = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$= -p_2 A_2 \sin 45^\circ + F_{Ay} = \vec{V}_{2y} |\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ$$

$$= (V_2 \sin 45^\circ) |\rho V_2 A_2| = \rho V_2^2 A_2 \sin 45^\circ$$

$$F_{Ay} = p_2 A_2 \sin 45^\circ + \rho V_2^2 A_2 \sin 45^\circ$$

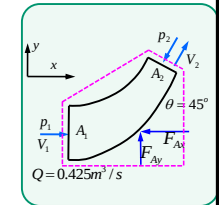
$$= 1.213 \times 10^5 \text{Pa} \times \frac{\pi}{4} \times (0.3\text{m})^2 \sin 45^\circ$$

$$+ 1000 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \times 6.01^2 (\text{m/s})^2 \times \frac{\pi}{4} \times (0.3\text{m})^2 \sin 45^\circ$$

$$= +7,958 \text{N} \quad (xy: (+) \text{ dir.})$$

$$R_y = -F_{Ay} = -7,958 \text{N} \quad (xy: (-) \text{ dir.})$$

F_{Ay} 의 초기 방향설정이
잘 되었음을 의미함



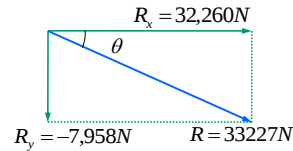
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 곡관 유동

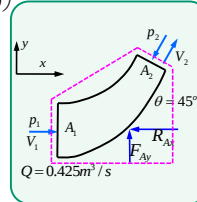
iii) Resultant forces of R

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$= \sqrt{(32260)^2 + (7,958)^2} = 33227N$$



$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{7958}{32260}\right) = -13.87$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 관내 유동

Example 5.11 Linear Momentum-Weight, Pressure, and Change in Speed

GIVEN: Water flows through a nozzle attached to the end of a laboratory sink faucet with a flowrate of 0.6 liter/s. The nozzle inlet and exit diameters are 16 mm and 5 mm and the nozzle axis is vertical. The mass of the nozzle is 0.1 kg. The pressure at section (1) is 464 kPa (gage). **FIND:** Determine the **anchoring force** required to hold the nozzle in place.

SOLUTION

✓ **Assumptions**

- 1) No friction
- 2) **Potential head** ($F_B \neq 0$)
- 3) **Steady flow** ($\partial/\partial t = 0$)
- 4) **Uniform at each section** ($\int \rightarrow$ mean value)

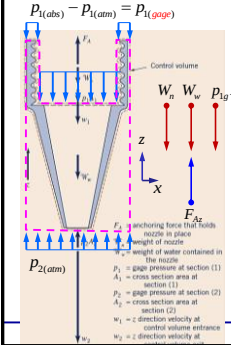
✓ **Basic equations (Momentum eq.)**

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$\underbrace{\quad}_{\text{CS에 작용하는 힘}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{CV 내부의 운동량 변화를}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{CS를 통과한 net momentum 변화를}}$

✓ **Solution**

$$\sum \vec{F}_z = -\underbrace{W_n}_{F_B} - \underbrace{W_w}_{F_S} + \underbrace{\vec{F}_{Az}}_{F_S} - p_{1g} A_1 = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 관내 유동

i) z-direction

$$\sum \vec{F}_z = -\underbrace{W_n}_{F_B} - \underbrace{W_w}_{F_S} + \underbrace{\vec{F}_{Az}}_{F_S} - p_{1g} A_1 = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Az} &= \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \\ &= \vec{V}_{1z} |\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + \vec{V}_{2z} |\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \\ &= (-V_1) |\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + (-V_2) |\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \\ &= -(-V_1) |\rho V_1 A_1| + (-V_2) |\rho V_2 A_2| + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \\ &= (+\rho V_1^2 A_1) - (\rho V_2^2 A_2) + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \\ &= \dot{m}(V_1 - V_2) + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \quad (\dot{m} = \rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2) \\ &= \dot{m}(w_1 - w_2) + W_n + W_w + p_{1g} A_1 \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 관내 유동

$$\dot{m} = \rho w_1 A_1 = \rho Q = (999 \text{ kg/m}^3)(0.6 \text{ liter/s})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{liter}) = 0.599 \text{ kg/s}$$

$$w_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi(D_1^2/4)} = \frac{(0.6 \text{ liter/s})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{liter})}{\pi(16 \text{ mm})^2/4(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)} = 2.98 \text{ m/s}$$

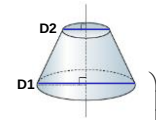
$$w_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi(D_2^2/4)} = \frac{(0.6 \text{ liter/s})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{liter})}{\pi(5 \text{ mm})^2/4(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)} = 30.6 \text{ m/s}$$

$$W_n = m_n g = (0.1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.981 \text{ N}$$

$$W_w = \rho V_w g$$

$$\begin{aligned} V_w &= \frac{1}{12} \pi h (D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2) \\ &= \frac{1}{12} \pi \frac{(30 \text{ mm})}{(1000 \text{ mm/m})} \times \left[\frac{(16 \text{ mm})^2 + (5 \text{ mm})^2 + (16 \text{ mm})(5 \text{ mm})}{(1000^2 \text{ mm}^2/\text{m}^2)} \right] \\ &= 2.84 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$= (999 \text{ kg/m}^3)(2.84 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.0278 \text{ N}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 관내 유동

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{Ax} &= \dot{m}(w_1 - w_2) + W_n + W_w + p_{1g}A_1 \\
 &= (0.599\text{kg/s})(2.98\text{m/s} - 30.6\text{m/s}) + 0.981\text{N} + 0.0278\text{N} \\
 &\quad + (464\text{kPa})(1000\text{Pa/kPa}) \frac{\pi(16\text{mm})^2}{4(1000^2\text{mm}^2/\text{m}^2)} \\
 &= -16.5\text{N} + 0.981\text{N} + 0.0278\text{N} + 93.3\text{N} \\
 &= 77.8\text{N}
 \end{aligned}$$

(F_{Ax} 가 (+)값을 갖는 경우: 방향설정이 잘못되었음, 즉 x-z좌표에서 (+) z방향)

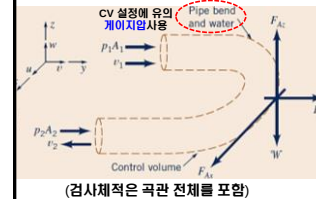
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 곡관 유동

Example 5.12 Linear Momentum- Pressure and Change in Flow Direction

GIVEN: Water flows through a horizontal, 180° pipe bend as shown in Fig. E5.12a and illustrated in Fig. E5.12b. The flow cross-sectional area is constant at a value of 0.01m² through the bend. The magnitude of the flow velocity everywhere in the bend is axial and 15 m/s. The **absolute pressures** at the entrance and exit of the bend are 207 kPa(abs) and 165 kPa (abs), respectively. **FIND:** Calculate the horizontal(x-y) components of the **anchoring force** required to hold the bend.

SOLUTION



Assumptions

- 1) No friction
- 2) Potential head ($F_B \neq 0$)
- 3) Steady flow ($\partial/\partial t = 0$)
- 4) Uniform at each section ($\int \rightarrow$ mean value)

Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_B + \bar{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \bar{V} dV + \int_{CS} \bar{V} (\rho \bar{V} \cdot d\bar{A})$$

CS에 작용하는 힘 CV 내부의 운동량 변화율 CS를 통과한 net momentum 변화율

Solution

$$\sum \bar{F}_{x,y} = \underbrace{\bar{F}_{Ax,y} + p_{1g}A_1 + p_{2g}A_2}_{F_x} = \int_{CS} \bar{V} (\rho \bar{V} \cdot d\bar{A})$$

(곡관 무게, 곡관 내 물의 무게는 z 방향 성분 즉, x-y 방향에서는 고려대상이 아님)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 곡관 유동

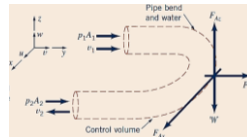
i) x-direction

$$\sum \bar{F}_x = \bar{F}_{Ax} = \int_{CS} \bar{V} (\rho \bar{V} \cdot d\bar{A}) = 0 \text{ (x 방향으로 들어오고 나가는 유량이 없으므로)}$$

ii) y-direction

$$\sum \bar{F}_y = \bar{F}_{Ay} + p_{1g}A_1 + p_{2g}A_2 = \int_{CS} \bar{V} (\rho \bar{V} \cdot d\bar{A})$$

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{Ay} &= \int_{CS} \bar{V} (\rho \bar{V} \cdot d\bar{A}) - p_{1g}A_1 - p_{2g}A_2 \\
 &= \bar{V}_1 | \rho V_1 A_1 | \cos 180^\circ + \bar{V}_2 | \rho V_2 A_2 | \cos 0^\circ - p_{1g}A_1 - p_{2g}A_2 \\
 &= (+V_1) | \rho V_1 A_1 | \cos 180^\circ + (-V_2) | \rho V_2 A_2 | \cos 0^\circ - p_{1g}A_1 - p_{2g}A_2 \\
 &= -(+V_1) | \rho V_1 A_1 | + (-V_2) | \rho V_2 A_2 | - p_{1g}A_1 - p_{2g}A_2 \\
 &= -\dot{m}(V_1 + V_2) - p_{1g}A_1 - p_{2g}A_2 \quad (\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2)
 \end{aligned}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

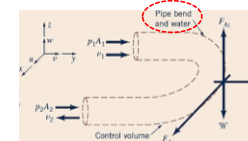
Example: 곡관 유동

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = (1000\text{kg/m}^3)(0.01\text{m}^2)(15\text{m/s}) = 150\text{kg/s}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{Ay} &= -(150\text{kg/s})(15\text{m/s} + 15\text{m/s}) \\
 &\quad - \underbrace{(207\text{kPa} - 101\text{kPa})}_{P_{1gauge}}(0.01\text{m}^2) - \underbrace{(165\text{kPa} - 101\text{kPa})}_{P_{2gauge}}(0.01\text{m}^2)
 \end{aligned}$$

$$\bar{F}_{Ay} = -4500\text{N} - 1057\text{N} - 637\text{N}$$

$$= -6194\text{N} \text{ (} F_{Ay} \text{가 (-)값을 갖는 경우: 방향설정이 잘못되었음, 즉 x-y좌표에서 (-) y방향)}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example

Example 5.13 Linear Momentum- Pressure and Change in speed, and Friction

GIVEN: Air flows steadily between two cross sections in a long, straight portion of 10 cm inside diameter pipe as indicated in Fig. E5.13, where the uniformly distributed temperature and pressure at each cross section are given. If the average air velocity at section (2) is 305 m/s, we found in Example 5.2 that the average air velocity at section (1) must be 67 m/s. Assume uniform velocity distributions at sections (1) and (2).

FIND: Determine the **frictional force** exerted by the **pipe wall** on the airflow between (1)-(2).

SOLUTION

CV 설정에 유의: 절대값 사용

Assumptions

- 1) Friction in the pipe
- 2) No potential head ($F_B = 0$)
- 3) Steady flow ($\partial / \partial t = 0$)
- 4) Uniform at each section ($\int \rightarrow$ mean value)

Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

CS에 작용하는 힘 CV 내부의 운동량 변화를 CS를 통과한 net momentum 변화를

✓ Solution

$$\sum \vec{F}_x = -R_x + p_{1abs}A_1 - p_{2abs}A_2 = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

R_x 관 내벽과 유체 사이의 반력 (마찰력)
(유체가 CV에 남긴 힘)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example

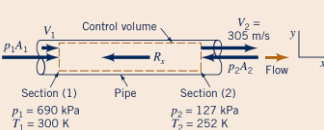
i) x-direction

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x &= -R_x + p_{1abs}A_1 - p_{2abs}A_2 = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \\ -R_x &= \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= \vec{V}_1 |\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + \vec{V}_2 |\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= (+V_1) |\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + (+V_2) |\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= -(+V_1) |\rho V_1 A_1| + (+V_2) |\rho V_2 A_2| - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= \dot{m}(V_2 - V_1) - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \quad (\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2) \\ R_x &= \dot{m}(V_1 - V_2) + (p_{1abs} - p_{2abs})A_2 \quad (A_1 = A_2) \\ &= \dot{m}(u_1 - u_2) + (p_{1abs} - p_{2abs})A_2 \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{p_2}{RT_2}, \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \\ \dot{m} &= \rho_2 A_2 u_2 = \left(\frac{p_2}{RT_2} \right) \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right) u_2 \quad (R = 286.9 \text{ J / kg} \cdot \text{K}) \\ &= \frac{127 \text{ kPa (abs)}}{(286.9 \text{ J / kg} \cdot \text{K})(252 \text{ K})} \times \frac{\pi (10 \text{ cm})^2}{4} (305 \text{ m/s}) = 4.21 \text{ kg/s} \\ R_x &= \frac{\pi (10 \text{ cm})^2}{4} (690 \text{ kPa} - 127 \text{ kPa}) - 4.31 \text{ kg} (305 \text{ m/s} - 67 \text{ m/s}) \\ &= 4422 \text{ N} - 1002 \text{ N} \\ &= 3420 \text{ N} \end{aligned}$$



관을 고정하는데 소요되는 힘은 ?
(관을 포함하도록 CV를 설정할 경우)

$$\begin{aligned} R_x - p_{atm}A &= -F_x \\ 3,420 \text{ N} &= -F_x + p_{atm}A \end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

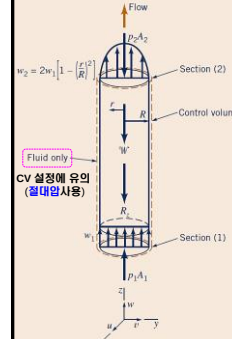
Example

Example 5.14 Linear Momentum-Weight, Pressure, Friction, and Nonuniform Vel.

GIVEN: Consider the flow of Example 5.4 to be vertically upward as shown by Fig. E5.14.

FIND: Develop an expression for the fluid **pressure drop** that occurs between sections (1) and (2).

SOLUTION



✓ Assumptions

- 1) Friction in the pipe
- 2) Potential head ($F_B \neq 0$)
- 3) Steady flow ($\partial / \partial t = 0$)
- 4) No uniform flow at each section (운동량 수정계수 고려)

✓ Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

CS에 작용하는 힘 CV 내부의 운동량 변화를 CS를 통과한 net momentum 변화를

✓ Solution

$$\sum \vec{F}_z = -R_z - W_{fluid} + p_{1abs}A_1 - p_{2abs}A_2 = \int_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

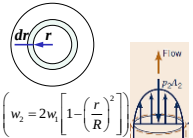
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example

i) z-direction

$$\sum \vec{F}_z = -R_z - \underbrace{W_{fluid} + p_{1abs}A_1 - p_{2abs}A_2}_{\vec{F}_s} = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$\begin{aligned} -R_z &= \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= \vec{V}_{1z}|\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + \int_{A_2} \vec{V}_{2z}|\rho V_2 \cdot dA_2| \cos 0^\circ + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= (+V_1)|\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + \int_{A_2} (+V_2)|\rho V_2 \cdot dA_2| \cos 0^\circ + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= -(+V_1)|\rho V_1 A_1| + \int_{A_2} (+V_2)|\rho V_2 \cdot dA_2| + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= -(+w_1)|\rho w_1 A_1| + \int_{A_2} (+w_2)|\rho w_2 \cdot dA_2| + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \end{aligned}$$



$$\int_{A_2} w_2 \rho w_2 dA_2 = \rho \int_0^R w_2^2 2\pi r dr = 2\pi \rho \int_0^R (2w_1)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 r dr$$

$$= 2\pi \rho (2w_1)^2 \left[r - 2\frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4} \right]_0^R = 2\pi \rho (2w_1)^2 \frac{R^2}{6}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example

$$\begin{aligned} \int_{A_2} w_2 \rho w_2 dA_2 &= 2\pi \rho (2w_1)^2 \frac{R^2}{6} = 4\pi \rho w_1^2 \frac{R^2}{3} = \frac{4}{3} w_1^2 \rho \pi R^2 = \frac{4}{3} w_1 \dot{m}_1 \\ -R_z &= -(+w_1)|\rho w_1 A_1| + \int_{A_2} (+w_2)|\rho w_2 \cdot dA_2| + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \\ &= -w_1^2 \rho (\pi R^2) + \underbrace{\frac{4}{3} \pi \rho w_1^2 R^2}_{\frac{1}{3} w_1^2 \rho (\pi R^2)} + W_{fluid} - p_{1abs}A_1 + p_{2abs}A_2 \end{aligned}$$

Since $A_1 = A_2$

$$(p_{1abs} - p_{2abs})A_1 = \frac{1}{3} \pi \rho w_1^2 R^2 + R_z + W_{fluid}$$

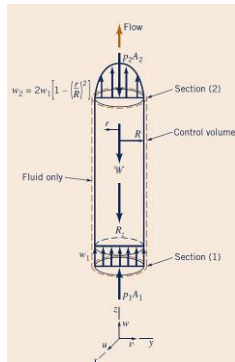
$$(p_{1abs} - p_{2abs}) = \frac{1}{3} \rho w_1^2 + \frac{R_z}{A_1} + \frac{W_{fluid}}{A_1} \quad (\text{관 내벽을 기준으로 CV를 설정할 경우})$$

$$(p_{1gauge} - p_{2gauge}) = \frac{1}{3} \rho w_1^2 + \frac{R_z}{A_1} + \frac{W_{fluid}}{A_1} \quad (\text{관 외벽을 기준으로 CV를 설정할 경우})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example

✓ 운동량 수정계수에 대한 고려



1) 단면 (1) 에서

$$\int_{A_1} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \rho \vec{V}_1^2 A_1 \rightarrow \beta = \frac{\int_{A_1} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})}{\rho \vec{V}_1^2 A_1} = 1$$

2) 단면 (2) 에서

$$\int_{A_1} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int_{A_2} w_2 \rho w_2 dA_2 = \frac{4}{3} \rho w_1^2 (\pi R^2)$$

$$\beta = \frac{\int_{A_1} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})}{\rho w_1^2 (\pi R^2)} = \frac{4}{3} = 1.333$$

(속도의 제곱 항이 포함되어 있어, 높은 속도에 가중치가 주어짐)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

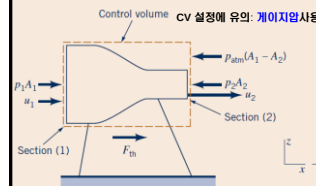
Example: 노즐 유동

Example 5.15 Linear Momentum-Thrust

GIVEN: A static thrust stand as sketched in Fig. E5.15 is to be designed for testing a jet engine. The following conditions are known for a typical test: Intake air velocity = 200 m/s; exhaust gas velocity = 500 m/s; intake cross-sectional area = 1 m²; intake static pressure = -22.5 kPa (abs); intake static temperature = 268 K; exhaust static pressure = 0 kPa = 101 kPa (abs).

FIND: Estimate the **nominal anchoring force** for which to design

SOLUTION



✓ Assumptions

- 1) Friction in the pipe
- 2) No potential head ($F_B = 0$)
- 3) Steady flow ($\partial / \partial t = 0$)
- 4) Uniform at each section ($\int \rightarrow$ mean value)

✓ Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} dV + \underbrace{\int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})}_{\text{CS를 통과한 운동량 변화율}} \quad \text{CS를 통과한 net momentum 변화율}$$

✓ Solution

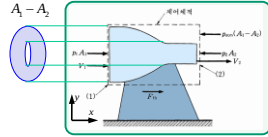
$$\sum \vec{F}_x = F_{th} + p_{1gauge}A_1 - p_{2gauge}A_2 = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 노즐 유동

i) x-direction

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x &= F_{th} + p_{1abs}A_1 - p_{2abs}A_2 - p_{atm}(A_1 - A_2) \\ &= F_{th} + (p_{1abs}A_1 - p_{atm}A_1) - (p_{2abs}A_2 - p_{atm}A_2) \\ &= F_{th} + p_{1gage}A_1 - p_{2gage}A_2 = \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})\end{aligned}$$



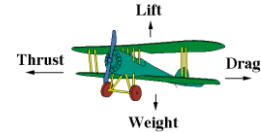
$$\begin{aligned}F_{th} &= \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) - p_{1gage}A_1 + p_{2gage}A_2 \\ &= \vec{V}_{1x}|\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + \vec{V}_{2x}|\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ - p_{1gage}A_1 + p_{2gage}A_2 \\ &= (+V_1)|\rho V_1 A_1| \cos 180^\circ + (+V_2)|\rho V_2 A_2| \cos 0^\circ - p_{1gage}A_1 + p_{2gage}A_2 \\ &= -(+V_1)|\rho V_1 A_1| + (+V_2)|\rho V_2 A_2| - p_{1gage}A_1 + p_{2gage}A_2 \\ &= \dot{m}(V_2 - V_1) - p_{1gage}A_1 + p_{2gage}A_2 \quad (\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(78.5kPa) \times (1000Pa/kPa)}{(286.9J/kg \cdot K) \times (268K)} = 1.02kg/m^3 \\ \dot{m} &= 1.02kg/m^3 \times 1m^2 \times 200m/s = 204kg/s\end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 노즐 유동

$$\begin{aligned}F_{th} &= \dot{m}(V_2 - V_1) - p_{1gage}A_1 + p_{2gage}A_2 \\ &= 204 \left(\frac{kg}{s} \right) \times (500 - 200)m/s - 22.5 \times 10^3 Pa \times 1m^2 + 0 \\ &= 83,700N \quad (xy: (+) \text{ dir.}) \quad (\text{측정 시험대 (검사체적)를 고정하는데 소요되는 힘}) \\ &\quad (\text{jet 엔진 내부 벽면이 연소가스에 가한 반발력}) \\ R_x &= -F_{th} = 83,700N \quad (xy: (-) \text{ dir.}) \quad (\text{엔진에서 발생한 추진력}) \\ &\quad (\text{연소가스가 jet 엔진 벽면에 가한 힘})\end{aligned}$$



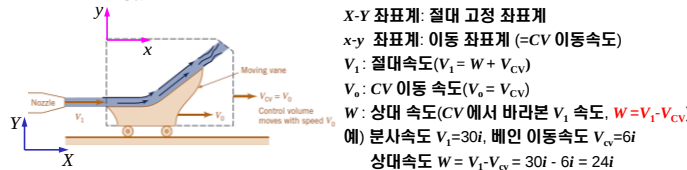
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 이동 베인

✓ 일정속도로 또는 가속(속도변화) 되는 검사체적 (변형이 없는 경우)

- 일정속도로 움직이는 변형 없는 검사체적: 문제 해결이 용이 (이동 베인 문제) (관성 검사체적)
- 가속되는 변형 없는 검사체적: 관성에 의한 **겉보기 힘**을 고려(가속 로켓 문제) (비관성 검사체적)
- 일정 또는 가속되는 변형 검사체적: 문제 풀이가 어려워 짐

✓ 일정속도(V_{CV})로 움직이는 변형 없는 검사체적(CV)



✓ 일정속도(V_{CV}) 이동, 변형 없는 검사체적(CV)에 대한 RTT

- 절대속도(V_1) 대신 **상대속도(W)**를 이용하여 얻을 수 있음

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b \rho dV + \int_{CS} b \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \rightarrow \frac{D}{Dt} \int_{sys} \vec{V} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용: 이동 베인

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} \int_{sys} \vec{V} \rho dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} \\ \sum F &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} \quad (\text{운동량 시간변화율} = \text{힘}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{W} + \vec{V}_{CV}) \rho dV + \int_{CS} (\vec{W} + \vec{V}_{CV}) \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} \quad (V(\text{절대속도}) = W(\text{상대속도}) + V_{CV}) \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{W} + \vec{V}_{CV}) \rho dV}_{\text{unsteady term}} + \underbrace{\int_{CS} \vec{W} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}}_{\text{(일정속도 검사체적)}} + \underbrace{\int_{CS} \vec{V}_{CV} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}}_{\dot{m}} \quad (\text{비압축성의 경우}=0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{W} \rho dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V}_{CV} \rho dV + \int_{CS} \vec{W} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} + \underbrace{\vec{V}_{CV} \int_{CS} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}}_{\dot{m}} \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{W} \rho dV}_{\text{unsteady term}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V}_{CV} \rho dV}_{\text{CV acceleration}} + \int_{CS} \vec{W} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A} + \underbrace{\vec{V}_{CV} \int_{CS} \rho \vec{W} \cdot d\vec{A}}_{\dot{m}} \\ &= \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A}) + \int_{CV} \frac{\partial \vec{V}_{CV}}{\partial t} \rho dV = \int_{CV} \vec{a}_{CV} \rho dV \quad (\text{검사체적이 가속도를 가질 때 즉, 비관성 검사체적의 경우})\end{aligned}$$

$$\sum F = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A}) \quad (\text{정상, 비압축성 유동, 일정속도 이동 검사체적 선형운동량 방정식})$$

(검사체적 기준 상대속도를 사용함에 유의)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

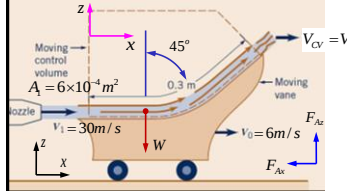
Example: 이동 베인

Example 5.17 Linear Momentum-Moving Control Volume

GIVEN: A vane on wheels moves with constant velocity V_0 when a stream of water having a nozzle exit velocity of V_1 is turned 45° by the vane as indicated in Fig. E5.17a. Note that this is the same moving vane considered in Section 4.4.6 earlier. The speed of the water jet leaving the nozzle is 30 m/s, and the vane is moving to the right with a constant speed of 6 m/s.

FIND: Determine the magnitude and direction of the force, R , exerted by the stream of water on the vane surface. (물 제트가 베인에 가하는 힘, R)

SOLUTION



Assumptions

- 1) No Friction
- 2) Potential head ($F_B \neq 0$)
- 3) Steady flow ($\partial/\partial t = 0$)
- 4) Uniform at each section ($\int \rightarrow$ mean value)

Basic equations (Momentum eq.)

$$\sum F = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A})$$

$$\vec{W} = \vec{V} - \vec{V}_{CV}$$

$$= (30 - 6) \text{ m/s} = 24 \text{ m/s}$$

Solution

$$\sum \vec{F} = -\vec{W} - \vec{F}_A = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A})$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 이동 베인

i) x-direction

$$\sum \vec{F}_x = -\vec{F}_{Ax} = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A})$$

$$-F_{Ax} = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A})$$

$$= \vec{W}_{1x} |\rho W_1 A_1| \cos 180^\circ + \vec{W}_{2x} |\rho W_2 A_2| \cos 0^\circ$$

$$= (+W_1) |\rho W_1 A_1| \cos 180^\circ + (+W_2 \cos 45^\circ) |\rho W_2 A_2| \cos 0^\circ$$

$$= -(+W_1) |\rho W_1 A_1| + (+W_2 \cos 45^\circ) |\rho W_2 A_2|$$

$$= -(+W_1) \dot{m}_1 + (+W_2 \cos 45^\circ) \dot{m}_2$$

ii) z-direction

$$\sum \vec{F}_z = \vec{F}_{Az} - \vec{W} = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A})$$

$$F_{Az} = \int_{CS} \vec{W} (\rho \vec{W} \cdot d\vec{A}) + \vec{W}$$

$$= +\vec{W}_{2z} |\rho W_2 A_2| \cos 0^\circ + W = (+W_2 \sin 45^\circ) |\rho W_2 A_2| \cos 0^\circ + W$$

$$= (+W_2 \sin 45^\circ) |\rho W_2 A_2| + W$$

$$= (+W_2 \sin 45^\circ) \dot{m}_2 + W$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 이동 베인

According to the assumption of no friction: $\vec{W}_1 = \vec{W}_2$

$$\vec{W}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_{CV} = (30 - 6) \text{ m/s} = 24 \text{ m/s} = \vec{W}_2$$

$$\dot{m}_1 = \rho W_1 A_1 = \rho W_2 A_2 = \dot{m}_2$$

$$W = \rho g A_1 l = \gamma A_1 l$$

$$F_{Ax} = (+W_1) \dot{m}_1 - (+W_2 \cos 45^\circ) \dot{m}_2 = \vec{W}_1 \dot{m} (1 - \cos 45^\circ) = \rho \vec{W}_1^2 A_1 (1 - \cos 45^\circ)$$

$$= (1000 \text{ kg/m}^3) (24 \text{ m/s})^2 (0.0006 \text{ m}^2) (1 - \cos 45^\circ)$$

$$= 101.2 \text{ N} \text{ (++) 값: 좌표 설정이 잘 되었음. x-z 좌표: (-) 방향)}$$

$$F_{Az} = (+W_2 \sin 45^\circ) \dot{m}_2 + W = \rho W_1^2 \sin 45^\circ + \rho g A_1 l$$

$$= (1000 \text{ kg/m}^3) (24 \text{ m/s})^2 \sin 45^\circ + (1000 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) (0.0006 \text{ m}^2) (0.3 \text{ m})$$

$$= 233.97 \text{ N} + 1.64 \text{ N}$$

$$= 235.61 \text{ N} \text{ (++) 값: 좌표 설정이 잘 되었음. x-z 좌표: (+) 방향)}$$

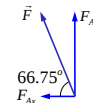
$$F = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Az}^2} = \sqrt{(101.2 \text{ N})^2 + (235.6 \text{ N})^2} = 256.4 \text{ N}$$

교과서 답 오류 있음

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 이동 베인

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{F_{Az}}{F_{Ax}} = \tan^{-1} \frac{235.6 \text{ N}}{101.2 \text{ N}} = 66.75^\circ$$

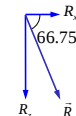


여기서 F 는 베인(검사체적)을 $V_0=6\text{m/s}$ 의 속도로 유지하는데 필요한 힘

분류가 베인에 가한 힘은 F 의 반대 부호를 가짐

$$R_x = -F_{Ax} = -101.2 \text{ N}$$

$$R_z = -F_{Az} = -235.6 \text{ N}$$



이동하는 베인에 의해 발생하는 동력(베인은 x 방향으로 이동하고 있음에 유의)

$$\text{Power} = R_x V_0 = 101.2 \text{ N} \times 6 \text{ m/s} = 607 \text{ Nm/s} = 607 \text{ J/s} = 607 \text{ W} = 0.607 \text{ kW} \approx 0.61 \text{ kW}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.2 선형운동량 방정식의 적용

- ✓ It is clear from the preceding examples that a flowing fluid can be forced to
1. change direction (방향 변화)
 2. speed up or slow down (속도 증가 또는 감소)
 3. have a velocity profile change (속도분포의 변화)
 4. do only some or all of the above (위의 일부 또는 모두 변화)
 5. do none of the above (위의 것 중 어느 것도 변화하지 않음) (정미력이 작용하지 않는 경우)
- ✓ Typical forces considered in this book include
- (a) Pressure (압력)
 - (b) Friction (마찰)
 - (c) Weight (무게)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2 선형 및 각운동량 방정식: 각운동량

✓ 각운동량의 정의(Definition of moment of momentum)

- 각운동량 = 거리(r) × 선형운동량($m\vec{V}$) = 거리(r) × 질량(m) × 속도(V). 벡터량(방향과 크기를 가짐)
- 운동량 모멘트(Moment of momentum) = 각운동량(angular momentum)

$$\text{Moment of Force}(\vec{M}_f) = \vec{F} \times \vec{l} \quad (\text{모멘트} = \text{힘} \times \text{거리})(\text{회전력})$$

$$\text{Momentum}(\vec{P}) = m\vec{V} \quad (\text{모멘텀} = \text{질량} \times \text{속도})(\text{운동량})$$

$$\text{Moment of momentum}(\vec{M}_o) = \vec{P} \times \vec{l} = m\vec{V} \times \vec{l} \quad (\text{운동량 모멘트} = \text{운동량} \times \text{거리})$$

$$\text{Angular momentum}(\vec{H}) = \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (\text{각운동량} = \text{거리} \times \text{운동량})$$

✓ 각운동량 변화율(Rate of change of angular momentum) = 토크(Torque)

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{V}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

$$\text{각운동량변화율} = \vec{V} \times (m\vec{V}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

Force(힘) = 운동량 변화율
Torque(토크) = 각운동량 변화율

$$= |\vec{V}| |m\vec{V}| \sin 0^\circ + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_t$$

질점에 작용하는 힘의 모멘트(Torque)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2 선형 및 각운동량 방정식: 각운동량

✓ 각운동량 보존 (Conservation of angular momentum)

- 외부의 힘을 받지 않는 계(system)에서 전체 각운동량의 합은 보존된다.
- 외력이 작용하지 않으면 회전하는 물체의 운동량 합은 동일하다.

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{V})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_t$$

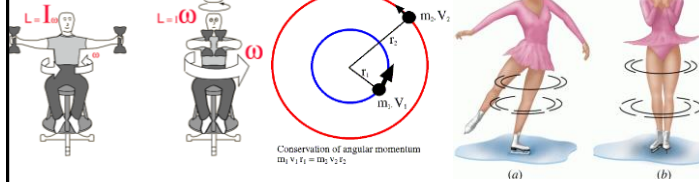
$$\text{if } M_t = 0 \rightarrow \frac{d\vec{H}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{H} = C$$

✓ Examples of conservation of momentum

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{r} \times \vec{P} = C$$

Angular momentum = mvr
 m = mass
 v = velocity
 r = radius

Conservation of angular momentum
 $m_1 v_1 r_1 = m_2 v_2 r_2$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.3 각운동량(운동량모멘트) 방정식 유도

✓ 유체입자에 대한 운동량모멘트(각운동량) 방정식(Newton의 제2법칙)

- 토크와 각운동량 사이의 관계를 나타내는 식

$$\frac{D}{Dt}(\vec{V} \rho \delta V) = \delta \vec{F}_{\text{particle}} \quad \begin{aligned} dm &= \rho \delta V & (\text{mass}) \\ d\vec{H} &= \vec{V} dm = \vec{V} \rho \delta V & (\text{momentum}) \end{aligned}$$

$\vec{V}$ = 관성좌표계를 기준으로 한 입자 속도

원점에 대해 양변에 모멘트를 취하면

$\vec{r}$ = 관성좌표계 원점으로부터 유체입자까지 위치벡터

$$\vec{r} \times \frac{D}{Dt}(\vec{V} \rho \delta V) = \vec{r} \times \delta \vec{F}_{\text{particle}}$$

$$\frac{D}{Dt}[(\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V] = \frac{D\vec{r}}{Dt} \times \vec{V} \rho \delta V + \vec{r} \times \frac{D(\vec{V} \rho \delta V)}{Dt}, \quad \left(\frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{V}, \vec{V} \times \vec{V} = 0 \right)$$

$$= \vec{V} \times \vec{V} \rho \delta V + \vec{r} \times \frac{D(\vec{V} \rho \delta V)}{Dt} \quad \hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$= 0 + \vec{r} \times \frac{D(\vec{V} \rho \delta V)}{Dt} \quad \hat{i} \times \hat{j} = +\hat{k}$$

$$= 0 + \vec{r} \times \frac{D(\vec{V} \rho \delta V)}{Dt} \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\frac{D}{Dt}[(\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V] = \vec{r} \times \delta \vec{F}_{\text{particle}}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.3 각운동량(운동량모멘트) 방정식 유도

시스템 내 전체 유체 입자(유체입자 집합)에 대해 적용하면

$$\frac{D}{Dt} \left[(\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V \right] = \vec{r} \times \delta \vec{F}_{particle}$$

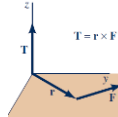
$$\left\{ \int_{sys} \frac{D}{Dt} \left[(\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V \right] = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \left[(\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V \right] \text{ (물질 도함수는 시간의 함수)} \right.$$

$$\left. \left[\sum \vec{r} \times \delta \vec{F}_{particle} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{sys} \text{ (유체입자에 대한 각운동량의 합 = 시스템의 각운동량)} \right] \right.$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{sys}$$

시스템의
운동량 모멘트의
시간 변화율

시스템에
작용하는
외부 토크의 합



시스템과 일치하는 검사체적의 경우: 시스템에 가해지는 토크 = 검사체적에 가해지는 토크

$$\sum (\vec{r} \times \vec{F})_{sys} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{CV}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.3 각운동량(운동량모멘트) 방정식 유도

✓ 검사체적(Control volume)에 대한 운동량모멘트방정식(Newton의 제2법칙)

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

시스템의
운동량 모멘트의
시간변화율

CV 내부 물질에 대한
운동량 모멘트의
시간변화율

CV의 표면(검사면)을
통한 운동량 모멘트의
장미유동률

✓ 고정되고 변형 없는 검사체적(Control volume)에 대한 운동량모멘트방정식

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{content \text{ of the control volume}}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.4 운동량모멘트(각운동량)방정식 적용

✓ Reynolds 수송정리 운동량모멘트방정식 적용 (각 항 계산과정 유의)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

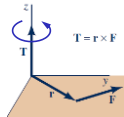
Flash **참기**

1) 정상유동(steady flow)의 경우: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho \delta V = 0$

2) 1차원 균일 유동의 경우: $\int$: mean value (평균값으로 변환)

3) 회전축 성분에 대해서만 다룬다.

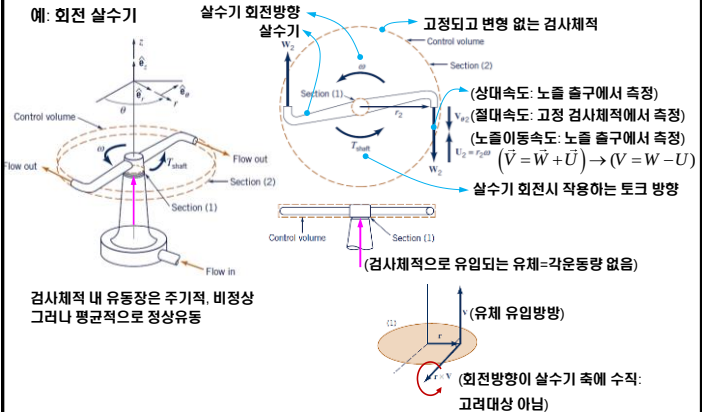
($\vec{r} \times \vec{V}$) $\rho \delta V = \vec{r} \times m \vec{V}$ 에서 ($\vec{r} \times \vec{V}$)가 이루는 평면에 수직인 회전축 성분만을 고려함.



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.4 운동량모멘트(각운동량)방정식 적용

✓ 운동량모멘트방정식 적용을 위한 검사체적 선택



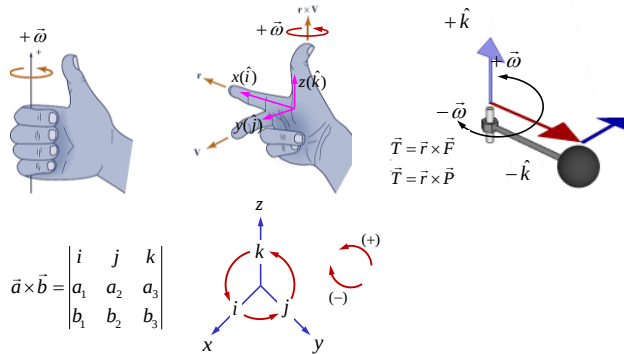
Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.4 운동량모멘트(각운동량)방정식 적용

✓Vector cross product와 회전방향

• 벡터 곱(cross product)은 오른손 법칙(right-hand rule)을 따른다. 구동 토크의 회전 방향

Vector Cross Product: $\vec{r} \times \vec{V} = |\vec{r}||\vec{V}|\sin\theta(+\hat{k})$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

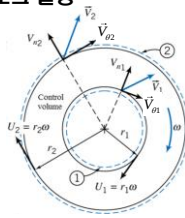
5.2.4 운동량모멘트(각운동량)방정식 적용

✓Control surface를 통과하는 각운동량 플럭스(flux) 및 토크 결정

$$\vec{T}_{shaft} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{axial} = \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})_{axial}$$

(축에 작용하는 토크 = 검사체적을 고정하는데 필요한 토크)

$$\begin{aligned}
 \vec{T}_{shaft} &= \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \\
 &= \underbrace{(\vec{r}_1 \times \vec{V}_{\theta 1}) \rho_1 V_1 A_1 \cos 180^\circ}_{\text{Inflow into CV}} + \underbrace{(\vec{r}_2 \times \vec{V}_{\theta 2}) \rho_2 V_2 A_2 \cos 0^\circ}_{\text{Outflow from CV}} \\
 &= (-)(\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}| \sin 90^\circ \hat{k}) \rho_1 V_1 A_1 + (\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \sin 90^\circ \hat{k}) \rho_2 V_2 A_2 \\
 &= (-)(\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}| \hat{k}) \dot{m}_1 + (\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \hat{k}) \dot{m}_2 \\
 &\quad [CCW = (+), CW = (-)] \text{ based on } \vec{V} \\
 &= \dot{m} \left[(\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}|) - (\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}|) \right] \hat{k}, \quad (\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = |\rho V A|)
 \end{aligned}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.4 운동량모멘트(각운동량)방정식 적용

$$\begin{aligned}
 \vec{T}_{shaft} &= \dot{m} \left[(\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}|) - (\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}|) \right] \hat{k}, \quad (\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = |\rho V A|) \\
 &= \dot{m} (-r_2 V_{\theta 2}) \hat{k} \quad (CW) \quad (\text{그림 5.4 살수기의 경우: 유입 각운동량 없음})
 \end{aligned}$$

✓토크(각운동량 시간변화율)에 의한 축동력(shaft power)

• 유체에 가해지는 동력(power)

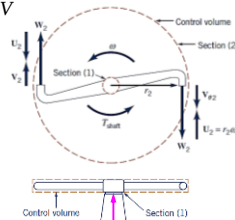
$$\begin{aligned}
 \text{Power}(P) &= \frac{\text{Work}}{\text{time}} = \frac{J(N \cdot m)}{s} = \frac{F \times l(\text{distance})}{s} = F \times V \\
 &= F \times r(\text{radius}) \times \frac{V_\theta}{r} \\
 &= (F \times r) \omega = T \omega \\
 &= \dot{m}(r_2 V_{\theta 2} - r_1 V_{\theta 1}) \omega
 \end{aligned}$$

$$\dot{W}_{shaft} = T_{shaft} \omega, \quad (\dot{W} = \text{power}, W = \text{work})$$

$$\begin{aligned}
 &= -r_2 V_{\theta 2} \dot{m} \omega \\
 &= -U_2 V_{\theta 2} \dot{m}, \quad (r_2 \omega = U_2)
 \end{aligned}$$

$$\dot{W}_{shaft} = -U_2 V_{\theta 2} \dot{m}, \quad (\dot{W}_{shaft} = \dot{W}_{shaft} / \dot{m}) \text{ (단위 질량당 축동력)}$$

(주의: 살수기 회전부 회전방향 = CCW, 살수기 회전축에 걸리는 토크 = CW)



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

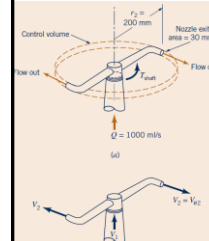
Example: 각운동량(운동량모멘트)

Example 5.18 Moment-of-Momentum-Torque

GIVEN: Water enters a rotating lawn sprinkler through its base at the steady rate of 1000 ml/s. The exit area of each of the two nozzles is 30mm² and the flow leaving each nozzle is in the tangential direction. The radius from the axis of rotation to the centerline of each nozzle is 200mm.

FIND: (a) Determine the resisting torque required to hold the sprinkler head stationary.
(b) Determine the resisting torque associated with the sprinkler rotating with a constant speed of 500 rev/min.
(c) Determine the speed of the sprinkler if no resisting torque is applied.

SOLUTION



✓Assumptions

- 1) No friction, 2) No potential head ($F_g=0$)
- 3) Steady flow, 4) Uniform at each section

✓Basic equations

$$\vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{r} \times \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

✓Solution: resisting torque

Force(힘) = 운동량 변화율
Torque(토크) = 각운동량 변화율

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 각운동량(운동량모멘트)

(a) Determine the resisting torque required to hold the sprinkler head stationary.

$$\begin{aligned}\vec{T}_{shaft} &= \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \\ &= \underbrace{(\vec{r}_1 \times \vec{V}_{\theta 1}) \rho_1 V_1 A_1 \cos 180^\circ}_{\text{Inflow into CV}=0} + \underbrace{(\vec{r}_2 \times \vec{V}_{\theta 2}) \rho_2 V_2 A_2 \cos 0^\circ}_{\text{Outflow from CV}} \\ &= +(-|\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \sin 90^\circ \hat{k}) \rho_2 V_2 A_2 \\ &= +(-|\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \hat{k}) \dot{m}_2, \quad (CCW = (+), CW = (-)) \\ &= \dot{m} (-|\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \hat{k}), \quad (\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = |\rho V A|) \\ &= -r_2 V_{\theta 2} \dot{m} \hat{k} \quad (CW) \\ &= -r_2 V_2 \dot{m} \hat{k} \quad (\because V_{\theta 2} = V_2) \\ &= -(0.2m)(16.7m/s)(0.999kg/s) \hat{k} \\ &= -3.34Nm \hat{k} \quad (CW)\end{aligned}$$

(W: 상대속도, 노즐 출구에서 측정)
(V: 절대속도, 고정 검사체적에서 측정 = W)
(U: 노즐 이동속도 = 0)

$V_2 = 16.7m/s$ (from ex. 5.7)
 $\dot{m} = \rho Q$
 $= \frac{(1000ml/s)(10^{-3}m^3/liter)(999kg/m^3)}{1000ml/liter}$
 $= 0.999kg/s$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Example: 각운동량(운동량모멘트)

(b) Resisting torque associated with the sprinkler rotating with a constant speed of 500rpm.

살수기 노즐 출구 절대속도: $V_2 = W_2 - U_2$
 $W_2 = 16.7m/s$

$$U_2 = r_2 \omega = (0.2m) \times \frac{(500rev/min) \times (2\pi rad/rev)}{(60s/min)} = 10.5m/s$$

$$V_2 = W_2 - U_2 = 16.7m/s - 10.5m/s = 6.2m/s$$

$$T_{shaft} = -r_2 V_2 \dot{m} \hat{k} \quad (\because V_{\theta 2} = V_2)$$

$$= -(0.2m)(6.2m/s)(0.999kg/s) \hat{k} = -1.24Nm \hat{k} \quad (CW)$$

(W: 상대속도, 노즐 출구에서 측정)
(V: 절대속도, 고정 검사체적에서 측정)
(U: 노즐 이동속도)

(c) Determine the speed of the sprinkler if no resisting torque is applied.

$$T_{shaft} = (-r_2 W_2 + r_2 U_2) \dot{m} \hat{k} = -r_2 (W_2 - r_2 \omega) \dot{m} \hat{k} = 0$$

$$0 = -r_2 (W_2 - r_2 \omega)$$

$$\omega = \frac{W_2}{r_2} = \frac{16.7m/s}{0.2m} = 83.5rad/s = \frac{(83.5rad/s)(60s/min)}{2\pi rad/rev}$$

$$= 797rpm$$

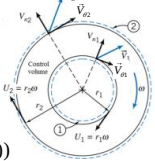


Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.2.4 운동량모멘트(각운동량)방정식 적용

✓ 운동량모멘트(각운동량)방정식의 터보기계(turbo machinery: 펌프, 터빈)적용

$$\begin{aligned}\vec{T}_{shaft} &= \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \\ &= \underbrace{(\vec{r}_1 \times \vec{V}_{\theta 1}) \rho_1 V_1 A_1 \cos 180^\circ}_{\text{Inflow into CV}} + \underbrace{(\vec{r}_2 \times \vec{V}_{\theta 2}) \rho_2 V_2 A_2 \cos 0^\circ}_{\text{Outflow from CV}} \\ &= (-)(\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}| \sin 90^\circ \hat{k}) \rho_1 V_1 A_1 + (\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \sin 90^\circ \hat{k}) \rho_2 V_2 A_2 \\ &= (-)(\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}| \hat{k}) \dot{m}_1 + (\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}| \hat{k}) \dot{m}_2, \quad (CCW = (+), CW = (-)) \\ &= \dot{m} [(\pm |\vec{r}_2| |\vec{V}_{\theta 2}|) - (\pm |\vec{r}_1| |\vec{V}_{\theta 1}|)] \hat{k}, \quad (\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = |\rho V A|) \\ &= \dot{m} [(\pm \vec{r}_{out} \cdot \vec{V}_{\theta out}) - (\pm \vec{r}_{in} \cdot \vec{V}_{\theta in})] \hat{k}, \quad (\text{Euler's Turbine formula})\end{aligned}$$



✓ 유체에 가해지는 축동력 (shaft power): 펌프의 경우

$$\begin{aligned}\dot{W}_{shaft} &= \vec{T}_{shaft} \omega \\ &= \dot{m} [(\pm \vec{r}_{out} \cdot \vec{V}_{\theta out}) - (\pm \vec{r}_{in} \cdot \vec{V}_{\theta in})] \omega \hat{k} = \dot{m} [(\pm \vec{U}_{out} \cdot \vec{V}_{\theta out}) - (\pm \vec{U}_{in} \cdot \vec{V}_{\theta in})] \hat{k} \\ \dot{W}_{shaft} &= [(\pm \vec{U}_{out} \cdot \vec{V}_{\theta out}) - (\pm \vec{U}_{in} \cdot \vec{V}_{\theta in})] \dot{m} \hat{k}\end{aligned}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3 The Energy Equation (에너지 방정식)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3 에너지방정식-열역학 제1법칙

✓ 일(work)과 경로함수(path function)

어떤 물체에 힘을 가해 미소변위가 생겼을 때 힘과 미소변위의 dot product으로 정의되며, 경로함수(path function) 임

$$\text{Work(J)} = \text{Force(N)} \times \text{distance(m)}$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_c \delta W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

✓ 일(work)의 표현: 열유체 관점

$$W(J) = F \times s$$

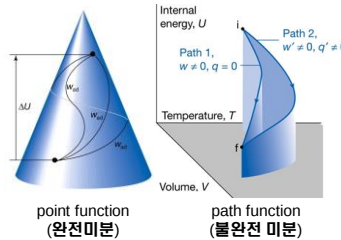
$$= \text{Force(N)} \times \text{distance(m)}$$

$$W(J) = F \times s = pA \times s = p \times V$$

$$= \text{Pressure(N/m}^2) \times \text{Volume(m}^3)$$

$$\text{Power(W)} = p \times Q = \text{Pressure(N/m}^2) \times Q(\text{m}^3/\text{s}) \quad (\text{Nm/s} = \text{J/s})$$

$$= F \times \frac{s}{t} = F \times V$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3 에너지방정식-열역학 제1법칙

✓ 일과 열의 등가성 원리 (Joule의 실험 결과)

$$W = Q \rightarrow \oint \delta W = \oint \delta Q$$

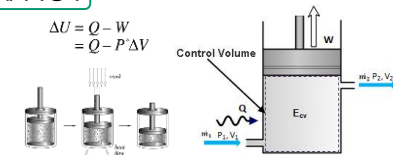
$$0 = \oint (\delta Q - \delta W) \quad (\text{싸이를 적분이 0 : 점함수(point function)를 의미})$$

$$dE = \delta Q - \delta W$$

✓ 열역학 제 1 법칙 (first law of thermodynamics) : 에너지 보존법칙

$$\delta Q = \delta W + dE$$

$$\text{공급열량} = \text{기계적 일} + \text{에너지 증가}$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.1 에너지방정식의 유도

✓ 시스템에 대한 열역학 제1 법칙

$$dE = \delta Q - \delta W$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{sys}} e \rho dV = (\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out})_{\text{sys}} + (\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out})_{\text{sys}} = (\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{net in})_{\text{sys}}$$

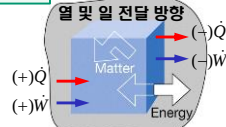
시스템에 저장되는
중 에너지의
시간 변화율

열전달에 의해 시스템 내부에
더해지는 에너지의 정미
시간변화율

일전달에 의해 시스템 내부에
더해지는 에너지의 정미
시간변화율

✓ 시스템과 일치하는 검사체적의 경우

$$(\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{net in})_{\text{sys}} = (\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{net in})_{CV}$$



✓ 검사체적(Control volume)에 대한 RTT 에너지방정식(열역학 제1법칙)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{sys}} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

시스템에 저장되는
중 에너지의
시간 변화율

검사체적에 저장되는
중 에너지 증가율

CV의 표면(검사면)을
통과하는 중 에너지의
정미 유출율

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.1 에너지방정식의 유도

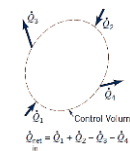
✓ 검사체적(Control volume)에 대한 에너지방정식(열역학 제1법칙)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{sys}} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = (\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{net in})_{CV}$$

1) 열전달을 구성 : 전도, 대류, 복사에 의한 열전달. (+) 유입, (-) 유출

$$\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out} = 0 \quad (\text{adiabatic process})$$

2) 일전달을 구성 : 일 전달의 시간변화율(=동력). (+) 유입, (-) 유출
축일, 유동일, 전단일, 기타 일(에너지 손실)



$$\dot{W} = \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_{other}$$

$\dot{W}_{shaft}$: Shaft work
 $\dot{W}_{normal}$: Normal stress at CV (flow work)
 $\dot{W}_{shear}$: Shear stress at CV
 $\dot{W}_{other}$: Other work

$$\textcircled{1} \dot{W}_{shaft} = T_{shaft} \omega$$

$$\dot{W}_{shaft, net in} = \sum \dot{W}_{shaft, in} - \sum \dot{W}_{shaft, out}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.1 에너지방정식의 유도

② $\dot{W}_{normal\ stress}$: Normal stress at CV (flow work)

유체 Δm 질량이 검사체적으로 유입될 때 한 일(유동일)

Flow work = Force(F) $\times$ distance(ΔL)

$$= (pA) \times \Delta L$$

$$\frac{\text{Flow work}}{\text{unit mass}} = \frac{(pA) \times \Delta L}{\Delta m} = \frac{(pA) \times \Delta L}{\rho A \Delta L} = \frac{p(A \times \Delta L)}{\rho A \Delta L}$$

$$= \frac{p}{\rho} = pV \left\{ \begin{array}{l} \text{Flow work at inlet} = p_1 V_1 (\text{work done on CV to get fluid in}) \\ \text{Flow work at outlet} = p_2 V_2 (\text{work done by CV as fluid exits}) \end{array} \right.$$

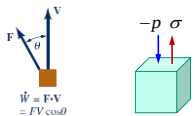
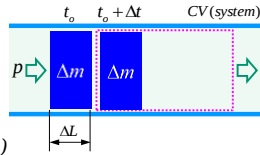
유동일(Flow work) 전달률

$$\delta \dot{W}_{normal\ stress} = \delta F_{normal\ stress} \cdot \vec{V} = \sigma d\vec{A} \cdot \vec{V} = -p d\vec{A} \cdot \vec{V}$$

$$\dot{W}_{normal\ stress} = \int_{CS} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \int_{CS} p \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

③ $\dot{W}_{shear}$: Shear stress at CV

$$\delta \dot{W}_{shear\ stress} = \delta F_{shear\ stress} \cdot \vec{V} = \tau d\vec{A}_{pipe\ wall} \cdot \vec{V} \approx 0$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

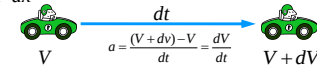
5.3.1 에너지방정식의 유도

3) 에너지 전달률 구성 : 내부, 운동, 위치에너지

① E_{ke} : kinetic energy (due to changes in flow velocity)

$$\delta W_{ke} = F dx = m adx = m \frac{dV}{dt} dx = m \frac{dx}{dt} \frac{dV}{dx} dx = m V dV = dE_{ke}$$

$$W_{ke} = m \int_{ke1}^{ke2} V dV = \frac{1}{2} m V^2$$



② E_{pe} : potential energy (due to changes in height of flow)

$$\delta W_{pe} = F dz = mg dz = dE_{pe}$$

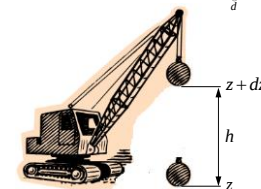
$$W_{pe} = mg \int_{pe1}^{pe2} dz = mg(z_2 - z_1) = mgh$$

③ $E_{internal}$: Internal energy (U)

(due to changes in temperature)

$$\Delta U = \Delta m(u_2 - u_1)$$

$$E = U + \frac{1}{2} m V^2 + mgz, \quad e = \bar{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.1 에너지방정식의 유도

✓ 에너지방정식(열역학 제1법칙)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in} - \underbrace{\int_{CS} p \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{normal stress (유동일)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{CS} p \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

(검사체적 내
에너지 변화율)

(검사체적을 통과한
Net 에너지 변화율)

(공급열량
전달률)

(축일
전달률)

$$e = \bar{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.2 에너지방정식의 적용

✓ 1차원 에너지방정식(열역학 제1법칙)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

1) 정상유동(steady flow)의 경우 : $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV = 0$

2) 1차원 균일 유동의 경우 : $\int$: mean value (평균값으로 변환)

$$\int_{CS} \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{out} \dot{m}_{out} - \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{in} \dot{m}_{in}$$

3) 축일이 발생하는 경우 : 비정상 유동이지만 시간평균 개념을 적용 정상유동으로 취급

$$\dot{m} \left[\bar{u}_{out} - \bar{u}_{in} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} - \left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} + \left(\frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2} \right) + g(z_{out} - z_{in}) \right] = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

$$\dot{m} \left[\bar{h}_{out} - \bar{h}_{in} + \left(\frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2} \right) + g(z_{out} - z_{in}) \right] = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.2 에너지방정식의 적용

✓ 밀폐계(Closed system)에 대한 열역학 제1법칙

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_{other} = \dot{m} \left\{ \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + gh + (u_2 - u_1) + (p_2 V_2 - p_1 V_1) \right\}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = U_2 - U_1 = \Delta U$$

✓ 개방계(open system)에 대한 열역학 제1법칙

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_{other} = \dot{m} \left\{ \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + gh + (u_2 - u_1) + (p_2 V_2 - p_1 V_1) \right\}$$

✓ 관로유동(pipe flow)에 대한 열역학 제1법칙

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_{other} = \dot{m} \left\{ \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + gh + (u_2 - u_1) + (p_2 V_2 - p_1 V_1) \right\}$$

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2)}_{\text{kinetic}} + \underbrace{gh}_{\text{potential}} + \underbrace{(p_2 V_2 - p_1 V_1)}_{\text{flow}}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.3 에너지방정식과 Bernoulli 방정식 비교

✓ 1차원 정상, 비압축성 유동에 대한 에너지방정식(열역학 제1법칙)

• 축일(shaft work)이 없는 경우

$$\dot{m} \left[\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} - \left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} + \left(\frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2} \right) + g(z_{out} - z_{in}) \right] = \dot{Q}_{net\ in} + \dot{W}_{shaft\ net\ in}$$

$$\dot{m} \left[\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} + \frac{p_{out}}{\rho} - \frac{p_{in}}{\rho} + \left(\frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2} \right) + g(z_{out} - z_{in}) \right] = \dot{Q}_{net\ in}$$

한 개의 입구 및 출구를 갖는 1차원 유동에 대해 단위 질량으로 다시 정리하면

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} - (\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q_{net\ in})$$

1차원 정상, 비압축성, 비점성 유동에 대한 Bernoulli 방정식

$$p_{out} + \frac{\rho V_{out}^2}{2} + \gamma z_{out} = p_{in} + \frac{\rho V_{in}^2}{2} + \gamma z_{in}$$

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in}$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.3 에너지방정식과 Bernoulli 방정식 비교

두 방정식의 비교로부터 (정상, 비압축성, 비점성 유동에 대해)

$$(\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q_{net\ in}) = 0$$

점성 유동의 경우: $(\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q_{net\ in}) > 0$

정상, 비압축성, 점성 유동에 대한 Bernoulli 방정식(손실을 고려한 방정식: 수정방정식)

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} - (\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q_{net\ in})$$

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} - (\text{loss})$$

$$\text{loss} = (\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q_{net\ in})$$

Bernoulli equation at steady flow state, inviscid flow

$$\frac{V^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = c, \quad \frac{\rho V^2}{2} + \gamma h + p = c, \quad \frac{V^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma} = c$$

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.3 에너지방정식과 Bernoulli 방정식 비교

✓ 1차원 정상, 비압축성 유동에 대한 에너지방정식(열역학 제1법칙)

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} + w_{shaft\ net\ in} - (\text{loss})$$

$$p_{out} + \frac{\rho V_{out}^2}{2} + \gamma z_{out} = p_{in} + \frac{\rho V_{in}^2}{2} + \gamma z_{in} + \rho w_{shaft\ net\ in} - \rho(\text{loss})$$

$$\frac{p_{out}}{\gamma} + \frac{V_{out}^2}{2g} + z_{out} = \frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{V_{in}^2}{2g} + z_{in} + g w_{shaft\ net\ in} - g(\text{loss})$$

$$\frac{p_{out}}{\gamma} + \frac{V_{out}^2}{2g} + z_{out} = \frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{V_{in}^2}{2g} + z_{in} + h_s - h_L, \quad \left(h_s = g w_{shaft\ net\ in} = \frac{\dot{W}_{shaft\ net\ in}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{shaft\ net\ in}}{\gamma Q} \right)$$

h_s : 축수두
 h_L : 수두손실

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.3.4 비균일 유동에 에너지방정식 적용

✓비균일 유동: 운동에너지 수정계수 적용

$$\int_{CS} \frac{V^2}{2} \rho \cdot d\vec{A} = \dot{m} \left(\alpha_{out} \frac{\bar{V}_{out}^2}{2} - \alpha_{in} \frac{\bar{V}_{in}^2}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \alpha : \text{kinetic energy coefficient} \\ \bar{V} : \text{mean velocity at section} \end{array} \right.$$

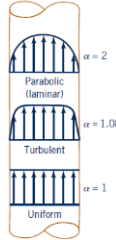
$$\text{운동에너지 수정계수: } \frac{\dot{m} \alpha \bar{V}^2}{2} = \int_{CS} \frac{V^2}{2} \rho \cdot d\vec{A} \rightarrow \alpha = \frac{\int_{CS} \frac{V^2}{2} \rho \cdot d\vec{A}}{\dot{m} \bar{V}^2 / 2}$$

✓비균일 유동에 대한 에너지방정식

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{\alpha_{out} \bar{V}_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{\alpha_{in} \bar{V}_{in}^2}{2} + gz_{in} + w_{shaft \text{ net in}} - (\text{loss})$$

$$p_{out} + \frac{\rho \alpha_{out} \bar{V}_{out}^2}{2} + \gamma z_{out} = p_{in} + \frac{\rho \alpha_{in} \bar{V}_{in}^2}{2} + \gamma z_{in} + \rho w_{shaft \text{ net in}} - \rho (\text{loss})$$

$$\frac{p_{out}}{\gamma} + \frac{\alpha_{out} \bar{V}_{out}^2}{2g} + z_{out} = \frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{\alpha_{in} \bar{V}_{in}^2}{2g} + z_{in} + \frac{w_{shaft \text{ net in}}}{g} - g(\text{loss})$$



Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

5.4 2nd Law of Thermodynamics- Irreversible flow (비가역 유동)

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University

Homework #6

✓Problem set for Ch. 5

2, 4, 10, 16, 20,
26, 30, 38, 40, 48,
54, 60, 66, 88, 92
108, 112, 116, 132, 134
(20 problems)

제출기한: chapter 5. 시험 보기 직전

Fluid Engineering Lab., Jeonbuk National University